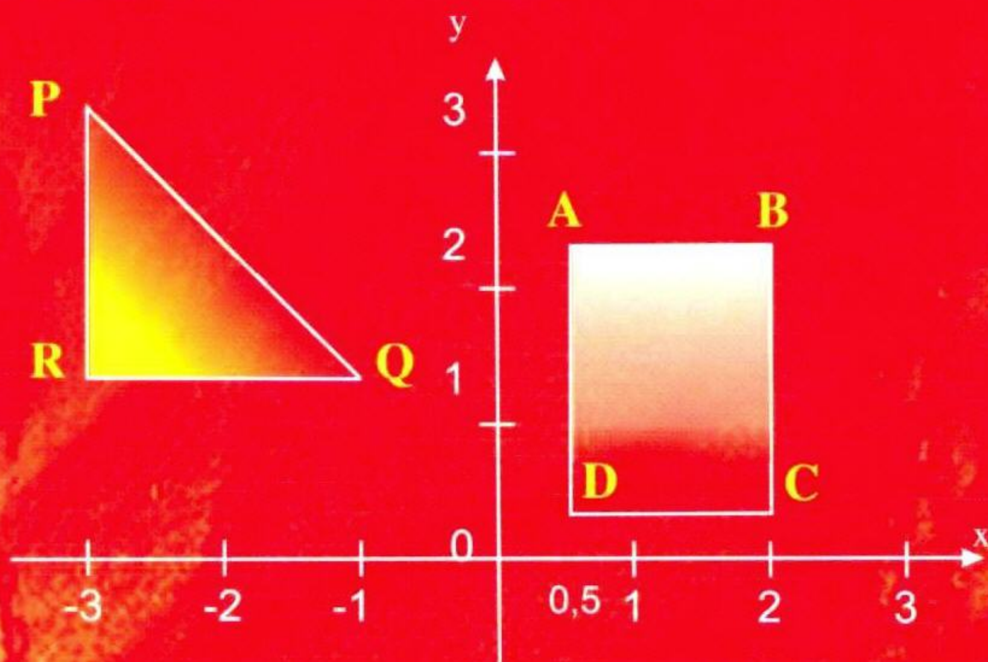
NGUYỄN ĐỨC TẤN - PHAN HOÀNG NGÂN
ĐỖ QUANG THANH

Tuyển chọn 405 BÀI TẬP TOÁN 7



(Tái bản lần thứ 1)





NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN ĐỨC TẤN - PHAN HOÀNG NGÂN
ĐỖ QUANG THANH

TUYỂN CHỌN 405 BÀI TẬP TOÁN 7

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Hiện nay các sách tham khảo **Toán 7** trên thị trường rất đa dạng và phong phú. Bởi thế các thầy cô giáo và các em học sinh rất cần có những cuốn sách tham khảo có chất lượng để củng cố và rèn luyện. Cuốn sách ***"Tuyển chọn 405 bài tập Toán 7"*** sẽ đáp ứng phần nào yêu cầu của thầy cô giáo và các em học sinh.

"Tuyển chọn 405 bài Toán 7" là các bài toán gồm đầy đủ các dạng toán mà các em được học. Các bài toán trong cuốn sách được biên soạn từ dễ đến khó, từ đơn giản đến phức tạp, giúp các em phát triển tư duy, óc sáng tạo.

Cuốn sách gồm hai phần:

- *Phần I: Đại số*
- *Phần II: Hình học*

Chúng tôi đã cố gắng trong quá trình biên soạn nhưng chắc hẳn không tránh khỏi những sai sót. Rất mong nhận được góp ý của quý bạn đọc để lần tái bản sau được tốt hơn.

Các tác giả

PHẦN I: ĐẠI SỐ

Chương I: SỐ HỮU TỈ. SỐ THỰC

§1. TẬP HỢP Q CÁC SỐ HỮU TỈ

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Số hữu tỉ

Số hữu tỉ là số được viết dưới dạng $\frac{a}{b}$ với a, b $\in$ Z, b $\neq$ 0.

Tập hợp các số hữu tỉ được kí hiệu là Q.

2. Biểu diễn số hữu tỉ trên trục số

Trên trục số, điểm biểu diễn số hữu tỉ x cũng được gọi là điểm x.

3. So sánh hai số hữu tỉ

So sánh hai số hữu tỉ x và y ta làm như sau:

Bước 1: Viết x, y dưới dạng hai phân số với cùng mẫu dương:

$$x = \frac{a}{m}, y = \frac{b}{m} \ (m > 0)$$

Bước 2: So sánh các tử là các số nguyên a và b.

Nếu a < b thì x < y

Nếu a = b thì x = y

Nếu a > b thì x > y

– Số hữu tỉ lớn hơn 0 gọi là số hữu tỉ dương;

– Số hữu tỉ nhỏ hơn 0 gọi là số hữu tỉ âm;

– Số 0 không là số hữu tỉ dương cũng không là số hữu tỉ âm.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 1. Điền kí hiệu $\in$, $\notin$, $\subset$ thích hợp vào ô trống:

38 ☐ N; –1963 ☐ Z; –1963 ☐ N

$-\frac{5}{9}$ ☐ Z; $-\frac{5}{9}$ ☐ Q; N ☐ Z ☐ Q

Giải

38 $\boxed{\in}$ N; $\quad -1963$ $\boxed{\in}$ Z; $\quad -1963$ $\boxed{\notin}$ N

$-\dfrac{5}{9}$ $\boxed{\notin}$ Z; $\quad -\dfrac{5}{9}$ $\boxed{\in}$ Q; $\quad$ N $\boxed{\subset}$ Z $\boxed{\subset}$ Q

Bài 2. Điền kí hiệu (N, Z, Q) thích hợp vào ô trống:

$-\dfrac{1968}{1963} \in \square$; $\quad -2006 \in \square$; $\quad 45678 \in \square$

Giải

- $-\dfrac{1968}{1963} \in \boxed{Q}$;
- $-2006 \in \boxed{Z}$; $\quad -2006 \in \boxed{Q}$
- $45678 \in \boxed{N}$; $\quad 45678 \in \boxed{Z}$; $\quad 45678 \in \boxed{Q}$

Bài 3. Trong các phân số sau, những phân số nào biểu diễn số hữu tỉ $\dfrac{5}{-7}$:

$\dfrac{-15}{21}$; $\dfrac{-10}{28}$; $\dfrac{20}{-28}$; $\dfrac{-28}{42}$; $\dfrac{-45}{63}$.

Giải

Ta có: $\dfrac{5}{-7} = \dfrac{-5}{7}$

Rút gọn các phân số đã cho ta được:

$\dfrac{-15}{21} = \dfrac{-5}{7}$; $\quad \dfrac{-10}{28} = \dfrac{-5}{14}$; $\quad \dfrac{20}{-28} = \dfrac{-5}{7}$;

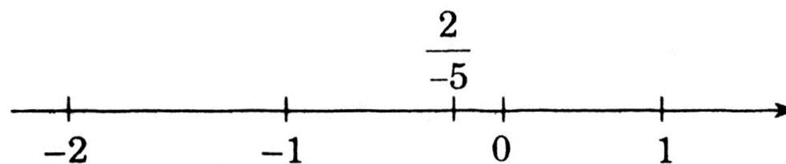
$\dfrac{-28}{42} = \dfrac{-2}{3}$; $\quad \dfrac{-45}{63} = \dfrac{-5}{7}$

Vậy các phân số biểu diễn số hữu tỉ $\dfrac{5}{-7}$ là $\dfrac{-15}{21}$; $\dfrac{20}{-28}$ và $\dfrac{-45}{63}$.

Bài 4. Biểu diễn số hữu tỉ $\dfrac{2}{-5}$ trên trục số.

Giải

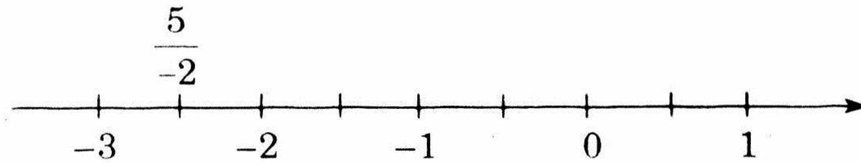
Ta có $\dfrac{2}{-5} = \dfrac{-2}{5}$. Biểu diễn số hữu tỉ $\dfrac{2}{-5}$ trên trục số như sau:



Bài 5. Biểu diễn số hữu tỉ $\frac{5}{-2}$ trên trục số:

Giải

Ta có: $\frac{5}{-2} = \frac{-5}{2}$. Biểu diễn số hữu tỉ $\frac{5}{-2}$ trên trục số như sau:



Bài 6. So sánh các số hữu tỉ sau:

a) $x = \frac{-4}{9}$; $\qquad y = \frac{7}{-15}$

b) $x = \frac{2}{-3}$; $\qquad y = \frac{-123}{369}$

c) $x = \frac{-1}{4}$; $\qquad y = -0,25$

Giải

a) $x = \frac{-4}{9} = \frac{-20}{45}$; $\qquad y = \frac{7}{-15} = \frac{-7}{15} = \frac{-21}{45}$

Ta có $-20 > -21$ và $45 > 0$ nên $\frac{-20}{45} > \frac{-21}{45}$. Vậy $x > y$

b) $x = \frac{2}{-3} = \frac{-2}{3}$; $\qquad y = \frac{-123}{369} = \frac{-1}{3}$

Ta có: $-2 < -1$ và $3 > 0$ nên $\frac{-2}{3} < \frac{-1}{3}$. Vậy $x < y$

c) $x = \frac{-1}{4} = -0,25$; $\qquad y = -0,25$

$-0,25 = -0,25$. Vậy $x = y$

Bài 7. Sắp xếp các số hữu tỉ sau theo thứ tự giảm dần: $\frac{2}{5}$; $\frac{-2}{3}$; $\frac{-4}{-7}$; $\frac{2}{3}$; 0; $\frac{3}{-2}$.

Giải

Ta có: $\frac{2}{5} = \frac{12}{30}$; $\frac{-2}{3} = \frac{-4}{6}$; $\frac{-4}{-7} = \frac{4}{7} = \frac{12}{21}$

$\frac{2}{3} = \frac{14}{21}$; $\frac{3}{-2} = \frac{-3}{2} = \frac{-9}{6}$.

Ta có: $\frac{14}{21} > \frac{12}{21} > \frac{12}{30} > 0 > \frac{-4}{6} > \frac{-9}{6}$

Vậy $\frac{2}{3} > \frac{-4}{-7} > \frac{2}{5} > 0 > \frac{-2}{3} > \frac{3}{-2}$.

Bài 8. Cho hai số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ ($b > 0$, $d > 0$). Chứng minh rằng nếu $ad < bc$ thì $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

Giải

Ta có $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$; $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$

Vì $b > 0$, $d > 0$ nên $bd > 0$ và $ad < bc$

Nên $\frac{ad}{bd} < \frac{bc}{bd}$. Vậy $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

Bài 9. So sánh các số hữu tỉ sau bằng cách nhanh nhất.

a) $x = \frac{-2345}{6789}$ và $y = \frac{12}{13}$

b) $x = \frac{-212121}{313131}$ và $y = \frac{-2626}{3131}$

Giải

a) $x = \frac{-2345}{6789} < \frac{0}{6789} = 0$; $y = \frac{12}{13} > \frac{0}{13} = 0$

Vậy $x < y$

b) $x = \frac{-212121}{313131} = \frac{-21.10101}{31.10101} = \frac{-21}{31}$;

$y = \frac{-2626}{3131} = \frac{-26.101}{31.101} = \frac{-26}{31}$.

Ta có $-21 > -26$ và $31 > 0$ nên $\frac{-21}{31} > \frac{-26}{31}$

Vậy $x > y$

Bài 10. Cho a, b ∈ Z; a < b; b > 0. Chứng minh rằng $\frac{a}{b} < \frac{a + 2006}{b + 2006}$

Giải

Ta có a < b nên 2006a < 2006b

Do đó $ab + 2006a < ab + 2006b$

Hay $a(b + 2006) < b(a + 2006)$

Vậy $\frac{a(b + 2006)}{b(b + 2006)} < \frac{b(a + 2006)}{b(b + 2006)}$

Hay $\frac{a}{b} < \frac{a + 2006}{b + 2006}$

Bài 11. Cho số hữu tỉ $x = \frac{a + 17}{a}$ $(a \neq 0)$. Với giá trị nguyên nào của a thì x là số nguyên?

Giải

x là số nguyên nên $a + 17 \vdots a$ mà $a \vdots a$ nên $17 \vdots a$

Do đó a là ước của 17.

Ta có: a = 1; –1; –17.

Bài 12. Cho số hữu tỉ $x = \frac{a - 5}{12}$ với a ∈ Z. Với giá trị nào của a thì:

a) x là số dương

b) x là số âm

c) x cũng không là số dương cũng không là số âm.

Giải

a) 12 > 0 nên x dương khi a – 5 > 0 hay a > 5

Vậy a = 6; 7; 8; 9; ...

b) 12 > 0 nên x âm khi a – 5 < 0 hay a < 5

Vậy a = 4; 3; 2; ...

c) 12 > 0 nên x không là số dương cũng không là số âm nên x = 0, ta có a – 5 = 0. Vậy a = 5

Bài 13. Cho số hữu tỉ $y = \frac{m-3}{m+2}$ với $m \in Z$, $m \neq -2$. Với giá trị nào của m thì y là số dương.

Giải

y là số dương khi $m - 3$ và $m + 2$ cùng dấu.

- $m - 3 > 0$ và $m + 2 > 0$ hay $m > 3$ và $m > -2$

  Vậy m = 4; 5; 6; ...

- $m - 3 < 0$ và $m + 2 < 0$ hay $m < 3$ và $m < -2$

  Vậy m = –3; –4; –5; ...

§2. CỘNG, TRỪ SỐ HỮU TỈ

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Cộng, trừ hai số hữu tỉ:

Viết hai số hữu tỉ x, y dưới dạng:

$$x = \frac{a}{m}; \quad y = \frac{b}{m} \; (a, b, m \in Z; m > 0)$$

$$x + y = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}$$

$$x - y = \frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}$$

2. Quy tắc chuyển vế:

Khi chuyển một số hạng từ vế này sang vế kia của một đẳng thức, ta phải đổi dấu số hạng đó.

$x + y = z \Rightarrow x = z - y$ (với mọi $x, y, z \in Q$).

3. Chú ý:

Phép cộng trong Q cũng có các tính chất cơ bản như phép cộng trong Z.

Trong Q, ta cũng có tổng đại số, trong đó có thể đổi chỗ các số hạng, đặt dấu ngoặc để nhóm các số hạng một cách tùy ý như các tổng đại số trong Z.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 14. Tính:

a) $\frac{-3}{10} + \frac{-4}{15}$; b) $\frac{-5}{12} - \frac{3}{8}$

Giải

a) $\frac{-3}{10} + \frac{-4}{15} = \frac{-9}{30} + \frac{-8}{30} = \frac{-17}{30}$;

b) $\frac{-5}{12} - \frac{3}{8} = \frac{-10}{24} - \frac{9}{24} = \frac{-19}{24}$

Bài 15. Hãy viết số hữu tỉ $\frac{-11}{32}$ dưới các dạng:

a) Tổng của hai số hữu tỉ âm.

b) Hiệu của hai số hữu tỉ dương.

Giải

a) $\frac{-11}{32} = \frac{-6}{32} + \frac{-5}{32}$; b) $\frac{-11}{32} = \frac{5}{32} - \frac{16}{32}$

Bài 16. Tính nhanh giá trị của biểu thức sau:

$$\frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{5}{6} - \frac{6}{7} + \frac{7}{8} + \frac{6}{7} - \frac{5}{6} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5}$$

Giải

$$\frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{5}{6} - \frac{6}{7} + \frac{7}{8} + \frac{6}{7} - \frac{5}{6} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5}$$

$$= \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{-4}{5} + \frac{4}{5}\right) + \left(\frac{5}{6} - \frac{5}{6}\right) + \left(\frac{-6}{7} + \frac{6}{7}\right) + \frac{7}{8}$$

$$= 0 + 0 + 0 + 0 + \frac{7}{8}$$

$$= \frac{7}{8}$$

Bài 17. Tính bằng cách thuận tiện nhất:

$$\left(2006 - \frac{5}{181} + \frac{1}{50}\right) - \left(4 + \frac{3}{181} - \frac{2}{50}\right) - \left(1 - \frac{8}{181} + \frac{3}{50}\right)$$

Giải

$$\left(2006-\frac{5}{181}+\frac{1}{50}\right)-\left(4+\frac{3}{181}-\frac{2}{50}\right)-\left(1-\frac{8}{181}+\frac{3}{50}\right)$$

$$=2006-\frac{5}{181}+\frac{1}{50}-4-\frac{3}{181}+\frac{2}{50}-1+\frac{8}{181}-\frac{3}{50}$$

$$=(2006-4-1)+\left(-\frac{5}{181}-\frac{3}{181}+\frac{8}{181}\right)+\left(\frac{1}{50}+\frac{2}{50}-\frac{3}{50}\right)$$

$$=\quad 2001 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0$$

$$=2001$$

Bài 18. Tìm x biết:

a) $x+\frac{3}{5}=\frac{1}{4}$; b) $x-\frac{4}{15}=\frac{-3}{10}$

Giải

a) $x+\frac{3}{5}=\frac{1}{4}$

$x=\frac{1}{4}-\frac{3}{5}$

$x=\frac{5}{20}-\frac{12}{20}$

$x=\frac{-7}{20}$

b) $x-\frac{4}{15}=\frac{-3}{10}$

$x=\frac{-3}{10}+\frac{4}{15}$

$x=\frac{-9}{30}+\frac{8}{30}$

$x=\frac{-1}{30}$

Bài 19. Tìm x biết:

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{12}-\frac{1}{20}-\frac{1}{30}-\frac{1}{42}-\frac{1}{56}-\frac{1}{72}-\frac{1}{90}-\frac{1}{110}=x-\frac{5}{13}$$

Giải

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{12}-\frac{1}{20}-\frac{1}{30}-\frac{1}{42}-\frac{1}{56}-\frac{1}{72}-\frac{1}{90}-\frac{1}{110}=x-\frac{5}{13}$$

$$\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}\right)=x-\frac{5}{13}$$

$$\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}+\frac{1}{7.8}+\frac{1}{8.9}+\frac{1}{9.10}+\frac{1}{10.11}\right)=x-\frac{5}{13}$$

$$\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right) = x - \frac{5}{13}$$

$$\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{11}\right) = x - \frac{5}{13}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{11} = x - \frac{5}{13}$$

$$\frac{1}{11} = x - \frac{5}{13}$$

$$x = \frac{1}{11} + \frac{5}{13}$$

$$x = \frac{13}{143} + \frac{55}{143}$$

$$x = \frac{68}{143}$$

Bài 20. Phần nguyên của một số hữu tỉ x, kí hiệu [x] là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

Ví dụ: $\left[\frac{7}{3}\right] = 2$; $[-1,5] = -2$

Tìm $\left[\frac{1}{5}\right]$; $\left[4\frac{1}{9}\right]$; $[-2,8]$

Giải

$\left[\frac{1}{5}\right] = 0$; $\left[4\frac{1}{9}\right] = 4$; $[-2,8] = -3$

Bài 21. Phần lẻ của một số hữu tỉ x, kí hiệu {x} là hiệu x – [x].

Tìm $\left\{\frac{5}{2}\right\}$; $\left\{\frac{-7}{3}\right\}$

Giải

- $\left\{\frac{5}{2}\right\} = \frac{5}{2} - \left[\frac{5}{2}\right] = \frac{5}{2} - 2 = \frac{5}{2} - \frac{4}{2} = \frac{1}{2}$
- $\left\{\frac{-7}{3}\right\} = \frac{-7}{3} - \left[\frac{-7}{3}\right] = \frac{-7}{3} - (-3) = \frac{-7}{3} + \frac{9}{3} = \frac{2}{3}$

Bài 22. Tìm x biết $x - y = \frac{-5}{9}$; $y + z = \frac{4}{3}$ và $z - \frac{1}{18} = \frac{-5}{18}$

Giải

$z - \frac{1}{18} = \frac{-5}{18}$ nên $z = \frac{-5}{18} + \frac{1}{18} = \frac{-4}{18} = \frac{-2}{9}$

$y + z = \frac{4}{3}$ nên $y = \frac{4}{3} - z = \frac{4}{3} - \frac{-2}{9} = \frac{12}{9} - \frac{-2}{9} = \frac{14}{9}$

$x - y = \frac{-5}{9}$ nên $x = \frac{-5}{9} + y = \frac{-5}{9} + \frac{14}{9} = \frac{9}{9} = 1$

Vậy x = 1

Bài 23. Chứng minh với mọi $x, y \in Q$ ta luôn có:

$[x] + [y] \le [x + y]$

Giải

Ta có: $[x] \le x < [x] + 1$; $[y] \le y < [y] + 1$

Nên $[x] + [y] \le x + y$

Vậy $[x] + [y]$ là số nguyên không vượt quá x + y. Mà $[x + y]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x + y.

Do đó, ta có $[x] + [y] \le [x + y]$

§3. NHÂN, CHIA SỐ HỮU TỈ

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Nhân và chia hai số hữu tỉ:

$x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}$

$x.y = \frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$

$x : y = \frac{a}{b}:\frac{c}{d} = \frac{a}{b}.\frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c}$

2. Chú ý:

– Phép nhân trong Q có các tính chất cơ bản của phép nhân như trong Z.

– Thương của phép chia số hữu tỉ x cho số hữu tỉ y ($y \ne 0$) gọi là tỉ số của x và y, kí hiệu là $\frac{x}{y}$ hay x : y.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 24. Tính:

a) $\frac{-5}{13}.\frac{52}{15}$; b) $\frac{-3}{20}:\frac{-9}{28}$

Giải

a) $\frac{-5}{13}.\frac{52}{15}=\frac{-5.52}{13.15}=\frac{-1.4}{1.3}=\frac{-4}{3}$

b) $\frac{-3}{20}:\frac{-9}{28}=\frac{-3}{20}.\frac{28}{-9}=\frac{-3.28}{20.(-9)}=\frac{1.7}{5.3}=\frac{7}{15}$

Bài 25. Tính:

a) $-2\frac{1}{5}.\frac{-3}{25}$; b) $\frac{15}{31}:(-5)$; c) $\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\right):\frac{-7}{30}$

Giải

a) $-2\frac{1}{5}.\frac{-3}{25}=\frac{-11}{5}.\frac{-3}{25}=\frac{-11.(-3)}{5.25}=\frac{33}{125}$

b) $\frac{15}{31}:(-5)=\frac{15}{31}:\frac{-5}{1}=\frac{15}{3}.\frac{1}{-5}=\frac{15.1}{3.(-5)}=\frac{15}{-15}=-1$

c) $\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\right):\frac{-7}{30}=\left(\frac{6}{15}-\frac{5}{15}\right):\frac{-7}{30}=\frac{1}{15}:\frac{-7}{30}=\frac{1}{15}.\frac{30}{-7}$

$=\frac{1.30}{15.(-7)}=\frac{-2}{7}$

Bài 26. a) Viết số hữu tỉ $\frac{-7}{66}$ thành tích của hai số hữu tỉ theo năm cách khác nhau.

b) Viết số hữu tỉ $\frac{-6}{13}$ thành thương của hai số hữu tỉ bằng năm cách khác nhau.

Giải

a) $\frac{-7}{66}=-7.\frac{1}{66}=\frac{-7}{2}.\frac{1}{33}=\frac{-7}{3}.\frac{1}{22}=\frac{-7}{11}.\frac{1}{6}=\frac{-7}{22}.\frac{1}{3}$

b) $\frac{-6}{13}=-6:13=-2:\frac{13}{3}=-3:\frac{13}{2}=6:(-13)=3:\left(\frac{-13}{2}\right)$

Bài 27. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \dfrac{\dfrac{4}{7} + \dfrac{4}{49} - \dfrac{4}{343} - \dfrac{4}{2007}}{\dfrac{5}{7} + \dfrac{5}{49} - \dfrac{5}{343} - \dfrac{5}{2007}}$$

Giải

$$A = \dfrac{4\left(\dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{49} - \dfrac{1}{343} - \dfrac{1}{2007}\right)}{5\left(\dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{49} - \dfrac{1}{343} - \dfrac{1}{2007}\right)} = \dfrac{4}{5}$$

Bài 28. Tìm x:

a) $\dfrac{2}{3}.x = \dfrac{-8}{17}$;

b) $x : \dfrac{7}{-2} = \dfrac{-4}{35}$

Giải

a) $\dfrac{2}{3}.x = \dfrac{-8}{17}$

$x = \dfrac{-8}{17} : \dfrac{2}{3}$

$x = \dfrac{-8}{17} . \dfrac{3}{2}$

$x = \dfrac{-12}{17}$

b) $x : \dfrac{7}{-2} = \dfrac{-4}{35}$

$x = \dfrac{-4}{35} . \dfrac{7}{-2}$

$x = \dfrac{2}{5}$

Bài 29. Tìm x:

a) $\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{5} = \dfrac{-1}{5}$

b) $\dfrac{5}{9}x - \dfrac{1}{3}x = \dfrac{1}{8} + \dfrac{11}{9}x$

Giải

a) $\dfrac{1}{2}x = \dfrac{-1}{5} + \dfrac{3}{5}$

$\dfrac{1}{2}x = \dfrac{2}{5}$

$x = \dfrac{2}{5} : \dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{5}{9}x - \dfrac{1}{3}x = \dfrac{1}{8} + \dfrac{11}{9}x$

$\dfrac{5}{9}x - \dfrac{3}{9}x = \dfrac{1}{8} + \dfrac{11}{9}x$

$\dfrac{2}{9}x = \dfrac{1}{8} + \dfrac{11}{9}x$

$x = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{1}$

$x = \frac{4}{5}$

$\frac{2}{9}x - \frac{11}{9}x = \frac{1}{8}$

$-x = \frac{1}{8}$

$x = -\frac{1}{8}$

Bài 30. Tính nhanh:

a) $\left(-1\frac{1}{3}\right).\left(-1\frac{1}{4}\right).\left(-1\frac{1}{5}\right) \ldots \left(-1\frac{1}{2006}\right)$

b) $\left(\frac{1}{2^2} - 1\right).\left(\frac{1}{3^2} - 1\right).\left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \ldots \left(\frac{1}{50^2} - 1\right)$

Giải

a) $\left(-1\frac{1}{3}\right).\left(-1\frac{1}{4}\right).\left(-1\frac{1}{5}\right) \ldots \left(-1\frac{1}{2006}\right)$

$= \frac{-4}{3}.\frac{-5}{4}.\frac{-6}{5} \ldots \frac{-2007}{2006} = \frac{4}{-3}.\frac{-5}{4}.\frac{6}{-5} \ldots \frac{-2007}{2006}$

$= \frac{-2007}{-3} = \frac{2007}{3}$

b) $\left(\frac{1}{2^2} - 1\right).\left(\frac{1}{3^2} - 1\right).\left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \ldots \left(\frac{1}{50^2} - 1\right)$

$= -\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{50^2}\right)$

$= -\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{2500}\right) = -\frac{3}{4}.\frac{8}{9}.\frac{15}{16} \ldots \frac{2499}{2500}$

$= -\frac{(1.3)(2.4)(3.5)\ldots(49.51)}{(2.2)(3.3)(4.4)\ldots(50.50)} = -\frac{(1.2.3\ldots49)(3.4.5\ldots51)}{(2.3.4\ldots50)(2.3.4\ldots50)}$

$= -\frac{1.51}{50.2} = -\frac{51}{100}$

Bài 31. Cho biết $\frac{ab}{c} < 0$ với a, b, c $\in$ Q, và a, b, c khác 0. Chứng tỏ rằng $\frac{bc}{a} < 0$

Giải

$\frac{ab}{c} < 0$ nên ab và c trái dấu

$\Rightarrow (ab)c < 0 \quad \Rightarrow a(bc) < 0 \quad \Rightarrow$ a và bc trái dấu $\Rightarrow \frac{bc}{a} < 0$

Bài 32. Cho 7 số hữu tỉ trên đường tròn sao cho trong tích hai số cạnh nhau luôn bằng $\frac{9}{25}$. Tìm các số đó.

Giải

Gọi 7 số đó là $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ dễ thấy các số này khác 0.

Ta có: $a_1a_2 = a_2a_3 = a_3a_4 = a_4a_5 = a_5.a_6 = a_6a_7 = a_7a_1$

$a_1a_2 = a_2a_3 \Rightarrow a_1 = a_3$; $a_3a_4 = a_4a_5 \Rightarrow a_3 = a_5$

$a_5a_6 = a_6a_7 \Rightarrow a_5 = a_7$

Ta có: $a_1 = a_3 = a_5 = a_7$ (1)

Tương tự ta có: $a_2 = a_4 = a_6$ (2)

Ta còn có: $a_1a_2 = a_7a_1 \Rightarrow a_2 = a_7$

Từ (1) và (2) ta có: $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7$

Nên $a_1.a_1 = \frac{9}{25}$.

$$(a_1)^2 = \left(\pm\frac{3}{5}\right)^2$$

$$a_1 = \pm\frac{3}{5}$$

Vậy $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_7 = \frac{3}{5}$

Hoặc $a_1 = a_2 = a_3 = ... a_7 = -\frac{3}{5}$.

§4. GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA SỐ THẬP PHÂN

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Giá trị tuyệt đối của một số hữu tỉ

$$|x| = \begin{cases} x \text{ nếu } x \geq 0 \\ -x \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$$

Nhận xét: Với mọi $x \in Q$ Ta luôn có:

$$|x| \geq 0,\ |x| = |-x|,\ |x| \leq x$$

2. Cộng, trừ, nhân, chia số thập phân:

- Để cộng, trừ, nhân, chia các số thập phân ta có thể viết chúng dưới dạng phân số thập phân rồi làm theo quy tắc các phép tính đã biết về phân số.
- Trong thực hành, khi cộng, trừ, nhân, hai số thập nhân thường áp dụng quy tắc về giá trị tuyệt đối về dấu tương tự như đối với số nguyên.
- Khi chia số thập phân x cho số thập phân y ($y \neq 0$), ta áp dụng quy tắc: thương của hai số thập phân x và y là thương của $|x|$ và $|y|$ với dấu "+" đằng trước nếu x và y cùng dấu và dấu "–" đằng trước nếu x và y khác dấu.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 33. Tìm $|x|$ biết:

a) $x = \dfrac{56}{67}$ b) $x = \dfrac{-4}{11}$ c) $x = 0$

Giải

a) $|x| = \left|\dfrac{56}{67}\right| = \dfrac{56}{67}$ b) $|x| = \left|\dfrac{-4}{11}\right| = \dfrac{4}{11}$ c) $|x| = |0| = 0$

Bài 34. Tính

a) $\left|\dfrac{-5}{9}\right| + \left|\dfrac{4}{9}\right| - (-2006)$ b) $|-2{,}8| - 1{,}5 - |-1{,}3|$

Giải

a) $\left|\frac{-5}{9}\right| + \left|\frac{4}{9}\right| - (-2006) = \frac{5}{9} + \frac{4}{9} + 2006 = 1 + 2006 = 2007$

b) $|-2,8| - 1,5 - |-1,3| = 2,8 - 1,5 - 1,3 = 1,3 - 1,3 = 0$

Bài 35. Tìm x biết:

a) $|x| = \frac{4}{19}$ b) $|x| = 0$ c) $|x| = |-2,5|$

Giải

a) $|x| = \frac{4}{19}$

$x = \frac{4}{19}$ hoặc $x = -\frac{4}{19}$

b) $|x| = 0$

$x = 0$

c) $|x| = |-2,5|$

$|x| = 2,5$

$x = 2,5$ hoặc $x = -2,5$

Bài 36. Tìm x biết:

a) $|x - 2| = \frac{4}{5}$ b) $|x + 1,3| = (-3, 5).(-0, 2)$

Giải

a) $|x - 2| = \frac{4}{5}$

$x - 2 = \frac{4}{5}$ hoặc $x - 2 = -\frac{4}{5}$

$x = \frac{4}{5} + 2$ hoặc $x = -\frac{4}{5} + 2$

$x = 2\frac{4}{5}$ hoặc $x = \frac{6}{5}$

b) $|x + 1,3| = (-3,5).(-0,2)$

$|x + 1,3| = 0,7$

$x + 1,3 = 0,7$ hoặc $x + 1,3 = -0,7$

$x = 0,7 - 1,3$ hoặc $x = -0,7 - 1,3$

$x = -0,6$ hoặc $x = -2$

Bài 37 Tìm x, y biết: $\left|x+\frac{25}{47}\right|+\left|y-\frac{9}{17}\right|=0$

Giải

Ta có: $\left|x+\frac{25}{47}\right| \geq 0$ và $\left|y-\frac{9}{17}\right| \geq 0$

Do đó $\left|x+\frac{25}{47}\right|+\left|y-\frac{9}{17}\right|=0$ khi $\left|x+\frac{25}{47}\right|=0$ và $\left|y-\frac{9}{17}\right|=0$ nên

$x+\frac{25}{47}=0$ và $y-\frac{9}{17}=0$. Vậy $x=-\frac{25}{47}$ và $y=\frac{9}{17}$

Bài 38. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\left|x-\frac{2}{5}\right|+\frac{8}{9}$

Giải

Ta có: $\left|x-\frac{2}{5}\right| \geq 0$ nên $A=\left|x-\frac{2}{5}\right|+\frac{8}{9} \geq \frac{8}{9}$

Dấu "=" xảy ra khi $x-\frac{2}{5}=0$ hay $x=\frac{2}{5}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{8}{9}$

Bài 39. Tìm giá trị lớn nhất của $B=-\left|x-\frac{4}{7}\right|+\frac{5}{9}$

Giải

Ta có: $-\left|x-\frac{4}{7}\right| \leq 0$ nên $B=-\left|x-\frac{4}{7}\right|+\frac{5}{9} \leq \frac{5}{9}$

Dấu "=" xảy ra khi $x-\frac{4}{7}=0$ hay $x=\frac{4}{7}$

Vậy giá trị lớn nhất của B là: $\frac{5}{9}$

Bài 40. Tìm giá trị nhỏ nhất của $C=\left|x-\frac{2}{5}\right|+\left|x-\frac{3}{5}\right|$

Giải

Vận dụng $|M|=|-M|$; $|P| \geq P$.

Dấu "=" xảy ra $P \geq 0$

Ta có : $C = \left|x - \frac{2}{5}\right| + \left|x - \frac{3}{5}\right| = \left|x - \frac{2}{5}\right| + \left|\frac{3}{5} - x\right| \geq x - \frac{2}{5} + \frac{3}{5} - x = \frac{1}{5}$

Dấu "=" xảy ra khi $x - \frac{2}{5} \geq 0$ và $\frac{3}{5} - x \geq 0$ hay $\frac{2}{5} \leq x \leq \frac{3}{5}$

Vậy giá trị lớn nhất của C là: $\frac{1}{5}$

Bài 41. Tìm giá trị nhỏ nhất của $D = |x - 2| + |x - 5| + |x - 18|$

Giải

Vận dụng $|M| = |-M|$; $|P| \geq P$.

Dấu "=" xảy ra $P \geq 0$ và $|Q| \geq 0$. Dấu "=" xảy ra khi $Q = 0$.

Ta có $D = |x - 2| + |x - 5| + |x - 18| = |x - 2| + |x - 5| + |18 - x|$

$\geq x - 2 + 0 + 18 - x = 16$

Dấu "=" xảy ra khi $x - 2 \geq 0$, $x - 5 = 0$ và $18 - x \geq 0$ hay $x = 5$

Vậy giá trị nhỏ nhất của D là 16

Bài 42. Tìm x biết:

$$\left|x + \frac{1}{8}\right| + \left|x + \frac{2}{8}\right| + \left|x + \frac{5}{8}\right| = 4x$$

Giải

Vế trái là tổng các giá trị tuyệt đối nên có giá trị là số không âm, do đó $4x \geq 0$ nên $x \geq 0$.

Ta có $x + \frac{1}{8} > 0$, $x + \frac{2}{8} > 0$, $x + \frac{5}{8} > 0$

Vậy có: $x + \frac{1}{8} + x + \frac{2}{8} + x + \frac{5}{8} = 4x$

$$(x + x + x) + \left(\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{5}{8}\right) = 4x$$

$$3x + 1 = 4x$$

$$4x - 3x = 1$$

$$x = 1$$

$x = 1 > 0$ (thích hợp)

Vậy $x = 1$

§5. LŨY THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Lũy thừa với số mũ tự nhiên:

Cho $n \in N$; $n > 1$, $x \in Q$ ta có: $x^n = \underbrace{x.x...x}_{\text{n thừa số}}$

(x^n gọi là x lũy thừa n, x là cơ số, n là số mũ)

Quy ước: $x^0 = 1$ ($x \in Q$; $x \neq 0$); $x^1 = x$

2. Tích và thương của hai lũy thừa cùng cơ số:

- Khi nhân hai lũy thừa cùng cơ số, ta giữ nguyên cơ số và cộng hai số mũ.

$$x^m . x^n = x^{m+n}$$

- Khi chia hai lũy thừa cùng cơ số khác 0, ta giữ nguyên cơ số và lấy số mũ của lũy thừa bị chia trừ đi số mũ của lũy thừa chia.

$$x^m : x^n = x^{m-n} \ (x \neq 0,\ m \geq n)$$

3. Lũy thừa của lũy thừa:

Khi tính lũy thừa của một lũy thừa, ta giữ nguyên cơ số và nhân hai số mũ.

$$(x^m)^n = x^{m.n}$$

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 43. Tính:

$$\left(\frac{-2}{5}\right)^3; \quad (-0,4)^2; \quad (-1,963)^0$$

Giải

- $\left(\frac{-2}{5}\right)^3 = -\frac{8}{125}$
- $(-0,4)^2 = 0,16$
- $(-1,963)^0 = 1$

Bài 44. Tính:

a) $\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right)^2$ b) $\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right)^3$

Giải

a) $\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{-1}{15}\right)^2 = \frac{1}{225}$ b) $\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{-3}{10}\right)^3 = \frac{-27}{1000}$

Bài 45. Tìm x biết:

a) $\left(x + \frac{2006}{2007}\right)^6 = 0$

b) $\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$

c) $\left(x - \frac{1}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$

Giải

a) $\left(x + \frac{2006}{2007}\right)^6 = 0$

$x + \frac{2006}{2007} = 0$

$x = 0 - \frac{2006}{2007}$

$x = -\frac{2006}{2007}$

b) $\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$

$\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2$

$x - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ hoặc $x - \frac{1}{5} = -\frac{2}{5}$

$x = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}$ hoặc $x = -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$

$x = \frac{3}{5}$ hoặc $x = -\frac{1}{5}$

c) $\left(x - \frac{1}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$

$\left(x - \frac{1}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3$

$x - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

$x = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}$

$x = \frac{3}{5}$

Bài 46. So sánh các số sau 3^{222} và 2^{333}

Giải

$3^{222} = 3^{2.111} = (3^2)^{111} = 9^{111}$

$2^{333} = 2^{3.111} = (2^3)^{111} = 8^{111}$

Ta có $9^{111} > 8^{111}$. Do đó $3^{222} > 2^{333}$.

Bài 47. Chứng minh rằng:

a) $7^{206} - 7^{205} + 7^{204}$ chia hết cho 43

b) $32^{17} + 16^{21} - 2^{82}$ chia hết cho 44

Giải

a) $7^{206} - 7^{205} + 7^{204} = 7^{204}(7^2 - 7 + 1) = 7^{204}.43$ chia hết cho 43

b) $32^{17} + 16^{21} - 2^{82} = (2^5)^{17} + (2^4)^{21} - 2^{82}$

$= 2^{85} + 2^{84} - 2^{82} = 2^{80}(2^5 + 2^4 - 2^2) = 2^{80}.44$

chia hết cho 44.

Bài 48. Tìm x biết:

a) $3^x + 3^{x+2} = 810$ b) $5^{x+2} + 5^{x+1} + 5^x = 19375$

Giải

a) $3^x + 3^{x+2} = 810$

$3^x(1 + 3^2) = 810$

$3^x.10 = 810$

$3^x = 810 : 10$

$3^x = 81$

$3^x = 3^4$

$x = 4$

b) $5^{x+2} + 5^{x+1} + 5^x = 19375$

$5^x(5^2 + 5^1 + 1) = 19375$

$5^x.31 = 19375$

$5^x = 19375 : 31$

$5^x = 625$

$5^x = 5^4$

$x = 4$

Bài 49. So sánh A và B, biết rằng:

$A = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{100}$ và $B = \frac{1}{2}.3^{101}$

Giải

$2A = 3A - A = 3(1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{100}) - (1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{100})$

$= 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{101} - 1 - 3 - 3^2 - ... - 3^{100}$

$= 3^{101} - 1$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2}(3^{101} - 1)$

$3^{101} - 1 < 3^{101}$

Vậy $A < B$

Bài 50. Tìm x, y biết $\left(x-\frac{3}{5}\right)^{2004}+(y+2,9)^{2006}\le 0$

Giải

Vì $\left(x-\frac{3}{5}\right)^{2004}\ge 0$ và $(y+2,9)^{2006}\ge 0$

Theo đề bài $\left(x-\frac{3}{5}\right)^{2004}+(y+2,9)^{2006}\le 0$

Nên $\left(x-\frac{3}{5}\right)^{2004}=0$ và $(y+2,9)^{2006}=0$

$x-\frac{3}{5}=0$ và $y+2,9=0$

$x=\frac{3}{5}$ và $y=-2,9$

§6. LŨY THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ (tiếp theo)

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

4. Lũy thừa của một tích:

Lũy thừa của một tích bằng tích các lũy thừa.

$(x.y)^n = x^n.y^n$

5. Lũy thừa của một thương:

Lũy thừa của một thương bằng thương các lũy thừa

$\left(\frac{x}{y}\right)^n=\frac{x^n}{y^n}$ $(y\ne 0)$

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 51. Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa của một số hữu tỉ.

a) $468^{103}:234^{103}$ b) $125^{111}.6^{333}$

Giải

a) $468^{103} : 234^{103} = \left(\dfrac{468}{234}\right)^{103} = 2^{103}$

b) $125^{111}.6^{333} = (5^3)^{111}.6^{333} = 5^{333}.6^{333} = (5.6)^{333} = 30^{333}$

Bài 52. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\dfrac{9^7.27^5}{3^{28}}$ b) $\dfrac{9^7.5^6.125^9}{15^{15}.5^{18}}$

Giải

a) $\dfrac{9^7.27^5}{3^{28}} = \dfrac{(3^2)^7.(3^3)^5}{3^{28}} = \dfrac{3^{14}.3^{15}}{3^{28}} = \dfrac{3^{29}}{3^{28}} = 3^1 = 3$

b) $\dfrac{9^7.5^6.125^9}{15^{15}.5^{18}} = \dfrac{(3^2)^7.5^6.(5^3)^9}{(3.5)^{15}.5^{18}} = \dfrac{3^{14}.5^6.5^{27}}{3^{15}.5^{15}.5^{18}} = \dfrac{3^{14}.5^{33}}{3^{15}.5^{33}} = \dfrac{1}{3}$

Bài 53. So sánh:

a) $3^{300} + 4^{300}$ và 3.24^{100}

b) $(20^{2006} + 11^{2006})^{2007}$ và $(20^{2007} + 11^{2007})^{2006}$

Giải

a) $4^{300} = (2^2)^{300} = 2^{300} . 2^{300} = (2^3)^{100} . (2^2)^{150}$

$= 8^{100} . 4^{150} > 8^{100}.(3^{100}.3) = 3(8^{100}.3^{100})$

$= 3.(8.3)^{100} = 3.24^{100}$

b) $(20^{2006} + 11^{2006})^{2007} = (20^{2006} + 11^{2006})^{2006}(20^{2006} + 11^{2006}) >$

$(20^{2006} + 11^{2006})^{2006}.20^{2006} = (20^{2006}.20 + 11^{2006}.20)^{2006} >$

$> (20^{2006}.20 + 11^{2006}.11)^{2006} = (20^{2007} + 11^{2007})^{2006}$

Bài 54. So sánh: 3333^{4444} và 4444^{3333}

Giải

Ta có:

$3333^{4444} = (3.1111)^{4444} = 3^{4444}.1111^{4444} = (3^4)^{1111}.1111^{4444}$

$= 81^{1111}.1111^{4444}$

và $4444^{3333} = (4.1111)^{3333} = 4^{3333}.1111^{3333} = (4^3)^{1111}.1111^{3333}$

$= 64^{1111}.1111^{3333}$

Mà $81^{1111} > 64^{1111}$, $1111^{4444} > 1111^{3333}$

Nên $3333^{4444} > 4444^{3333}$

Bài 55. Cho $a^3 + b^3 + c^3 = 0$. Chứng tỏ rằng $a^3b^3 + 2b^3c^3 + 3c^3a^3 \le 0$

Giải

Ta có: $a^3 + b^3 + c^3 = 0 \Rightarrow b^3 + c^3 = -a^3$; $a^3 + b^3 = -c^3$

Do đó: $a^3b^3 + 2b^3c^3 + 3c^3a^3 = a^3b^3 + c^3a^3 + 2c^3a^3 + 2b^3c^3$

$= a^3(b^3 + c^3) + 2c^3(a^3 + b^3)$

$= a^3(-a^3) + 2c^3(-c^3) = -a^6 - 2c^6 \le 0$

Bài 56. So sánh:

$$\left(\frac{1}{2^2} - 1\right)\left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \ldots \left(\frac{1}{1000^2} - 1\right) \text{ và } \frac{-1}{2}$$

Giải

$$\left(\frac{1}{2^2} - 1\right)\left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \ldots \left(\frac{1}{1000^2} - 1\right) = -\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)$$

$$\ldots\left(1 - \frac{1}{1000^2}\right) = -\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{1000000}\right)$$

$$= -\frac{3}{4}.\frac{8}{9}.\frac{15}{16} \ldots \frac{999999}{1000000}$$

$$= -\frac{(1.3)(2.4).(3.5)\ldots(999.1001)}{(2.2).(3.3).(4.4)\ldots(1000.1000)} =$$

$$= -\frac{(1.2.3\ldots999).(3.4\ldots1001)}{(2.3.4\ldots1000)(2.3.4\ldots1000)}$$

$$= -\frac{1.1001}{1000.2} = -\frac{1001}{2000} < -\frac{1000}{2000} = \frac{-1}{2}$$

Bài 57. Tìm các số a, b, c biết:

$$ab = \frac{-6}{7}, \quad bc = \frac{4}{3}, \quad ca = \frac{-7}{50}$$

Giải

Ta có:

$$(ab)(bc)(ca) = \frac{-6}{7}.\frac{4}{3}.\frac{-7}{50}$$

$$(abc)^2 = \frac{4}{25}$$

$$abc = \pm\frac{2}{5}$$

• Nếu abc = $\frac{2}{5}$ thì a = (abc) : (bc) = $\frac{2}{5} : \frac{4}{3} = \frac{2}{5}.\frac{3}{4} = \frac{3}{10}$

b = (abc) : (ca) = $\frac{2}{5} : \frac{-7}{50} = \frac{2}{5}.\frac{50}{-7} = \frac{20}{-7}$; c = (abc) : (ab) =

$= \frac{2}{5} : \frac{-6}{7} = \frac{2}{5}.\frac{7}{-6} = \frac{-7}{15}$

• Nếu abc = $-\frac{2}{5}$ thì a = (abc) : (bc) = $\frac{-2}{5} : \frac{4}{3} = \frac{-2}{5}.\frac{3}{4} = \frac{-3}{10}$

b = (abc) : (ca) = $\frac{-2}{5} : \frac{-7}{50} = \frac{-2}{5}.\frac{50}{-7} = \frac{20}{7}$; c = (abc) : (ab) =

$= \frac{-2}{5} : \frac{-6}{7} = \frac{-2}{5}.\frac{7}{-6} = \frac{7}{15}$

Bài 58. Biết rằng: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 12^2 = 650$

Tính nhanh tổng $2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + 24^2$

Giải

$2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + 24^2 = (2.1)^2 + (2.2)^2 + (2.3)^2 + ... + (2.12)^2$

$= 2^2.1^2 + 2^2.2^2 + 2^2.3^2 + ... + 2^2.12^2 = 2^2.(1^2 + 2^2 + ... + 12^2)$

$= 4.650 = 2600$

Bài 59. Tìm các số tự nhiên x, y biết $2^x - 2^y = 496$

Giải

Nếu $2^y = 0$ thì $2^x = 496$. Không tồn tại $x \in N$

Nếu $x \le y$ thì $2^x - 2^y \le 0$. Không xảy ra.

Vậy $x > y \ge 1$. Ta có $2^x - 2^y = 496$

$2^y(2^{x-y} - 1) = 2^4.31$

Vì $x > y \ge 1$; 2^y chỉ chứa thừa số nguyên tố 2, $2^{x-y} - 1$ lẻ.

Do vậy có: $2^y = 2^4$, $2^{x-y} - 1 = 31$

$y = 4$; $2^{x-y} = 32$

Nên $2^{x-4} = 2^5$ ta có $x - 4 = 5$

hay $x = 9$

Vậy $x = 9$ và $y = 4$

§7. TỈ LỆ THỨC

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa:

Tỉ lệ thức là đẳng thức của hai tỉ số $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

2. Tính chất:

– *Tính chất 1*: (Tính chất cơ bản của tỉ lệ thức)

Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì ad = bc

– *Tính chất 2:* (Điều kiện để bốn số lập thành tỉ lệ thức)

Nếu ad = bc và a, b, c, d $\neq$ 0 thì ta có các tỉ lệ thức:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}; \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a}.$$

Chú ý: Trong tỉ lệ thức a : b = c : d, nếu các số a, b, c, d được gọi là các số hạng của tỉ lệ thức, a và b là các số hạng ngoài hay ngoại tỉ, b và c là các số hạng trong hay trung tỉ.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 60. Thay tỉ số giữa các số hữu tỉ bằng tỉ số giữa các số nguyên.

a) $-3,9 : 1,43$ b) $6\frac{1}{5} : \frac{7}{8}$ c) $\frac{-4}{9} : 0,72$

Giải

a) $-3,9 : 1,43 = \frac{-39}{10} : \frac{143}{100} = \frac{-39}{10} . \frac{100}{143} = \frac{-30}{11}$

b) $6\frac{1}{5} : \frac{7}{8} = \frac{31}{5} : \frac{7}{8} = \frac{31}{5} . \frac{8}{7} = \frac{248}{35}$

c) $\frac{-4}{9} : 0,72 = \frac{-4}{9} : \frac{72}{100} = \frac{-4}{9} . \frac{100}{72} = \frac{-50}{81}$

Bài 61. Các tỉ số sau có lập thành một tỉ lệ thức không?

a) $\frac{3}{8} : \frac{5}{4}$ và $\frac{7}{10} : \frac{7}{3}$ b) $-5\frac{1}{2} : 22$ và $-2,25 : 10$

Giải

a) $\frac{3}{8} : \frac{5}{4} = \frac{3}{8} . \frac{4}{5} = \frac{3}{10}$; $\frac{7}{10} : \frac{7}{3} = \frac{7}{10} . \frac{3}{7} = \frac{3}{10}$

Hai tỉ số này bằng nhau nên ta có tỉ lệ thức:

$$\frac{3}{8} : \frac{5}{4} = \frac{7}{10} : \frac{7}{3}$$

b) $-5\frac{1}{2} : 22 = -5,5 : 22 = -0,25$; $-2,25 : 10 = -0,225$

Hai tỉ số này không bằng nhau nên chúng không lập thành một tỉ lệ thức.

Bài 62. Lập tất cả các tỉ lệ thức có thể được từ bốn số sau:

4,5; 6; 10,8; 14,4.

Giải

Ta có: 4,5 . 14,4 = 6.10,8 (= 64,8)

Do đó ta có các tỉ lệ thức sau:

$\frac{4,5}{6} = \frac{10,8}{14,4}$; $\frac{4,5}{10,8} = \frac{6}{14,4}$; $\frac{14,4}{6} = \frac{10,8}{4,5}$; $\frac{14,4}{10,8} = \frac{6}{4,5}$

Bài 63. Chọn câu trả lời sai:

Từ tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ với a, b, c, d khác 0. Ta có thể suy ra:

A. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; B. $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$; C. $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$; D. $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$

Giải

Chọn D.

Bài 64. Tìm x biết:

a) $\frac{x}{11,9} = \frac{1,5}{3,5}$ b) $\frac{x}{0,2} = \frac{80}{x}$

Giải

a) $\frac{x}{11,9} = \frac{1,5}{3,5}$

$x.3,5 = 1,5.11,9$

$x = \frac{1,5.11,9}{3,5}$

$x = 5,1$

b) $\frac{x}{0,2} = \frac{80}{x}$

$x.x = 80.0,2$

$x^2 = 16$

$x^2 = 4^2$

$x = \pm 4$

Bài 65. Tìm hai số x, y biết $\frac{x}{11} = \frac{y}{7}$ và x + y = −54

Giải

Đặt $\frac{x}{11} = \frac{y}{7} = k$. Ta có x = 11k, y = 7k

Mà x + y = −54, nên 11k + 7k = −54 ⇔ k = −3

Vậy x = 11k = −33; y = 7k = −21

Bài 66. Tìm hai số x, y biết $\frac{x}{5} = \frac{y}{2}$ và xy = 90

Giải

Đặt $\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = k$. Ta có x = 5k, y = 2k

Mà xy = 90, nên 5k.2k = 90

$10k^2 = 90$ do đó $k^2 = 9$ nên k = ±3

- Nếu k = 3 thì x = 5k = 15 và y = 2k = 6
- Nếu k = −3 thì x = 5k = −15 và y = 2k = −6

§8. TÍNH CHẤT CỦA DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} \quad (b \neq d \text{ và } b \neq -d)$$

Từ dãy tỉ số bằng nhau $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ta suy ra:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a-c+e}{b-d+f}$$

(Giả thiết các tỉ số đều có nghĩa)

2. Số tỉ lệ:

Khi có dãy tỉ số $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$ ta nói các số a, b, c tỉ lệ với các số m, n, p và có thể viết a : b : c = m : n : p

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 67. Tìm x và y biết $2x = 5y$ và $x + y = -42$

Giải

$2x = 5y$ và $x + y = -42$

Suy ra $\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = \frac{x+y}{5+2} = \frac{-42}{7} = -6$

Do đó • $\frac{x}{5} = -6 \Rightarrow x = -6.5 = -30$

• $\frac{y}{2} = -6 \Rightarrow y = -6.2 = -12$

Bài 68. Tìm x và y biết $\frac{x}{y} = \frac{5}{9}$ và $3x - 2y = 12$

Giải

$\frac{x}{y} = \frac{5}{9}$ và $3x - 2y = 12$

Suy ra $\frac{x}{5} = \frac{y}{9} = \frac{3x}{15} = \frac{2y}{18} = \frac{3x-2y}{15-18} = \frac{12}{-3} = -4$

Do đó: • $\frac{x}{5} = -4 \Rightarrow x = -4.5 = -20$

• $\frac{y}{9} = -4 \Rightarrow y = -4.9 = -36$

Bài 69. Tìm x, y, z biết $2x = 3y = 5z$; $x - y + z = -22$

Giải

$2x = 3y = 5z$; $x - y + z = -22$

Suy ra: $\frac{2x}{30} = \frac{3y}{30} = \frac{5z}{30}$; $x - y + z = -22$

Nên $\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{6} = \frac{x-y+z}{15-10+6} = \frac{-22}{11} = -2$

Do đó: • $\frac{x}{15} = -2 \Rightarrow x = -2.15 = -30$

• $\frac{y}{10} = -2 \Rightarrow y = -2.10 = -20$

• $\frac{z}{6} = -2 \Rightarrow z = -2.6 = -12$

Bài 70. Tìm x, y, z biết $\frac{x}{5} = \frac{y}{6}; \frac{y}{8} = \frac{z}{7}$ và $x + y - z = 138$

Giải

$\frac{x}{5} = \frac{y}{6}; \frac{y}{8} = \frac{z}{7}$ và $x + y - z = 138$

$\Rightarrow \frac{x}{5}.\frac{1}{4} = \frac{y}{6}.\frac{1}{4}; \frac{y}{8}.\frac{1}{3} = \frac{z}{7}.\frac{1}{3}$ và $x + y - z = 138$

$\Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{y}{24} = \frac{z}{21}$ và $x + y - z = 138$

Nên $\frac{x}{20} = \frac{y}{24} = \frac{z}{21} = \frac{x + y - z}{20 + 24 - 21} = \frac{138}{23} = 6$

Do đó
- $\frac{x}{20} = 6 \Rightarrow x = 6.20 = 120$
- $\frac{y}{24} = 6 \Rightarrow y = 6.24 = 144$
- $\frac{z}{21} = 6 \Rightarrow z = 6.21 = 126$

Bài 71. Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Chứng tỏ rằng: a) $\frac{3a + 2c}{3b + 2d} = \frac{3a - 2c}{3b - 2d}$ (với $3b \neq \pm 2d$)

b) $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2} = \frac{ac}{bd}$

Giải

a) Từ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\Rightarrow \frac{3a}{3b} = \frac{2c}{2d} \Rightarrow \frac{3a + 2c}{3b + 2d} = \frac{3a - 2c}{3b - 2d}$ (với $3b \neq \pm 2d$)

b) Từ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{c}{d}\right)^2 = \frac{a}{b}.\frac{c}{d}$

$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{ac}{bd} \Rightarrow \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2} = \frac{ac}{bd}$

Bài 72. Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$, $a + b + c \neq 0$

Chứng tỏ rằng $a = b = c$

Giải

Ta có $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{a+b+c}{b+c+a} = 1$

Do đó • $\frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b$

• $\frac{b}{c} = 1 \Rightarrow b = c$

Vậy $a = b = c$

Cách khác: $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{a} = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b$

Bài 73. Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$, $b + c + d \neq 0$.

Chứng minh rằng $\left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3 = \frac{a}{d}$

Giải

Từ $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$

Suy ra $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{a+b+c}{b+c+d}$

$\Rightarrow \left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \Rightarrow \left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3 = \frac{a}{d}$

Bài 74. Cho bốn tỉ số bằng nhau:

$\frac{a}{b+c+d}, \frac{b}{c+d+a}, \frac{c}{d+a+b}, \frac{d}{a+b+c}$. Tính giá trị của mỗi tỉ số đó, biết rằng a, b, c, d khác 0.

Giải

• Nếu $a + b + c + d = 0$ thì $b + c + d = -a$, $c + d + a = -b$,

$d + a + b = -c$, $a + b + c = -d$.

Ta có giá trị của một tỉ số bằng -1.

- Nếu a + b + c + d ≠ 0. Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{b+c+d} = \frac{b}{c+d+a} = \frac{c}{d+a+b} = \frac{d}{a+b+c}$$

$$= \frac{a+b+c+d}{b+c+d+c+d+a+d+a+b+a+b+c}$$

$$= \frac{a+b+c+d}{3(a+b+c+d)} = \frac{1}{3}$$

Bài 75. Các cạnh của một tam giác có số đo tỉ lệ với các số 3, 4, 5. Tính các cạnh của tam giác, biết chu vi của nó là 13,2cm.

Giải

Gọi độ dài các cạnh của tam giác lần lượt là a, b, c.

Ta có a + b + c = 13,2cm.

a, b, c tỉ lệ với 3, 4, 5 nên $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$.

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có.

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{3+4+5} = \frac{13,2}{12} = 1,1.$$

- $\frac{a}{3} = 1,1 \Rightarrow a = 1,1.3 = 3,3$
- $\frac{b}{4} = 1,1 \Rightarrow b = 1,1.4 = 4,4$
- $\frac{c}{5} = 1,1 \Rightarrow c = 1,1.5 = 5,5$

Vậy độ dài các cạnh của tam giác là 3,3cm; 4,4cm; 5,5cm.

Bài 76. Tìm các số có ba chữ số, biết rằng số đó chia hết cho 18 và các chữ số của nó tỉ lệ với ba số 1, 2, 3.

Giải

Gọi ba số của số cần tìm là a, b, c.

Theo đầu bài ta có số cần tìm chia hết cho 18 nên số cần tìm chia hết cho 9 nên a + b + c ⋮ 9 mà 1 ≤ a + b + c ≤ 27.

Do đó a + b + c = 9; 18 hoặc 27 (1)

Mặc khác

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{1+2+3}$$

$$a = \frac{a+b+c}{6}$$

$a \in N$ nên $a + b + c \vdots 6$ (2)

Từ (1) và (2) ta có a + b + c = 18

Vậy $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{18}{6} = 3$

Suy ra: a = 3; b = 6; c = 9.

Số cần tìm chẵn.

Vậy số cần tìm là 396 hoặc 936.

Bài 77. Một hình chữ nhật có chu vi là 160m. Tính diện tích của hình chữ nhật đó, biết tỉ số giữa hai cạnh là $\frac{3}{5}$.

Giải

Gọi độ dài hai cạnh là x (m) và y (m).

Theo đầu bài, ta có:

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{5} \text{ và } 2(x+y) = 160$$

Suy ra $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{x+y}{3+5} = \frac{80}{8} = 10$

- $\frac{x}{3} = 10 \Rightarrow x = 10.3 = 30$
- $\frac{y}{5} = 10 \Rightarrow y = 10.5 = 50$

Diện tích của hình chữ nhật đó là:

$30.50 = 1500 \ (m^2)$

§9. SỐ THẬP PHÂN HỮU HẠN. SỐ THẬP PHÂN VÔ HẠN TUẦN HOÀN

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Nhận xét:

- Nếu một phân số tối giản với mẫu dương mà mẫu không có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì phân số đó viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn.
- Nếu một phân số tối giản với mẫu dương mà mẫu có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì phân số đó viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.
  - Mỗi số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn biểu diễn một số hữu tỉ và ngược lại.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 78. Viết các số hữu tỉ sau dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc số thập phân vô hạn tuần hoàn.

$\frac{1}{4}$; $\frac{-11}{45}$; $\frac{-3}{8}$; $\frac{4}{11}$.

Giải

$\frac{1}{4} = 0,25$; $\frac{-11}{45} = -0,2(4)$; $\frac{-3}{8} = -0,375$; $\frac{4}{11} = 0,(36)$

Bài 79. Viết các số thập phân hữu hạn sau đây dưới dạng phân số tối giản: 0,5; –1,28; –0,625; 2,6

Giải

- $0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$
- $-1,28 = -\frac{128}{100} = -\frac{32}{25}$
- $-0,625 = -\frac{625}{1000} = -\frac{5}{8}$
- $2,6 = \frac{26}{10} = \frac{13}{5}$

Bài 80. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau đây dưới dạng phân số tối giản: 0,(3); 0,2(4); –0,6(81)

Giải

- $0,(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

• $0,2(4) = \frac{1}{10}.2,(4) = \frac{1}{10}[2 + 0,(4)] = \frac{1}{10}\left(2 + \frac{4}{9}\right)$

$= \frac{1}{10}.\frac{22}{9} = \frac{11}{45}$

• $-0,6(81) = -\frac{1}{10}.6,(81) = -\frac{1}{10}[6 + 0,(81)] = -\frac{1}{10}\left(6 + \frac{81}{99}\right)$

$= -\frac{1}{10}\left(6 + \frac{9}{11}\right) = -\frac{1}{10}.\frac{75}{11} = \frac{-15}{22}$

Bài 81. So sánh

a) 0,681 và 0,6(81) b) 0,(31) và 0,3(13)

Giải

a) 0,6(81) = 0,68181 ... > 0,681

b) $0,(31) = 0,(01) . 31 = \frac{1}{99}.31 = \frac{31}{99}$

Và $0,3(13) = 0,3 + 0,0(13) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}.\frac{13}{99} = \frac{310}{990} = \frac{31}{99}$

Vậy $0,(31) = 0,3(13)$ $(= \frac{31}{99})$

Bài 82. Chứng tỏ rằng:

a) 0,(53) + 0,(46) = 1 b) 0,(33) .3 = 1

Giải

a) $0,(53) + 0,(46) = \frac{53}{99} + \frac{46}{99} = \frac{99}{99} = 1$

b) $0,(33) .3 = \frac{33}{99}.3 = \frac{99}{99} = 1$

Bài 83. Tìm x biết:

a) 0,(3)x = 2 b) $0,(36)x = \frac{1}{3}$

Giải

a) $0,(3)x = 2$

$\frac{3}{9}x = 2$

$x = 2 : \frac{3}{9}$

$x = 6$

b) $0,(36)x = \frac{1}{3}$

$\frac{36}{99}x = \frac{1}{3}$

$x = \frac{1}{3} : \frac{36}{99}$

$x = \frac{11}{12}$

§10. LÀM TRÒN SỐ

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Quy ước làm tròn số:

– Nếu chữ số đầu tiên trong các chữ số bị bỏ đi nhỏ hơn 5 thì ta giữ nguyên bộ phận còn lại. Trường hợp số nguyên thì ta thay các chữ số bị bỏ đi bằng các chữ số 0.

– Nếu chữ số đầu tiên trong các chữ số bị bỏ đi lớn hơn 5 hoặc bằng 5 thì ta cộng thêm 1 vào chữ số cuối cùng của bộ phận còn lại. Trong trường hợp số nguyên thì ta thay các chữ số bị bỏ đi bằng các chữ số 0.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 84. Làm tròn các số sau đến hàng chục: 8494; 2059; 1425

Giải

$8494 \approx 8490$; $2059 \approx 2060$; $1425 \approx 1430$.

Bài 85. Làm tròn các số sau đến hàng trăm:

5738; 69563; 248329.

Giải

$5738 \approx 5700$; $69563 \approx 69600$; $248329 \approx 248300$

Bài 86. Làm tròn các số 89,4647 đến chữ số thập phân:

a) Thứ ba b) Thứ hai c) Thứ nhất

Giải

a) $89,4647 \approx 89,465$

b) $89,4647 \approx 89,46$

c) $89,4647 \approx 89,5$

Bài 87. Hãy ước lượng kết quả các phép tính sau.

a) 697.53

b) $8960 : 56$

Giải

a) $697.53 \approx 700.50 = 35000$.

Tích cần tìm có 5 chữ số và xấp xỉ 35000.

b) $8960 : 56 \approx 9000 : 60 = 150$

Thương phải tìm xấp xỉ 150.

Bài 88. Tính giá trị (làm tròn đến hàng đơn vị) của biểu thức:

$A = (56,18 + 21,8) : 3$ bằng hai cách.

Cách 1: Làm tròn các số trước rồi thực hiện phép tính.

Cách 2: Thực hiện phép tính rồi làm tròn kết quả.

Giải

Cách 1: $A = (56,18 + 21,8) : 3 \approx (56 + 22) : 3 = 26$

Cách 2: $A = (56,18 + 21,8) : 3 = 77,98 : 3$

$= 25,99(3) \approx 26$

§11. SỐ VÔ TỈ. KHÁI NIỆM VỀ CĂN BẬC HAI

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Số vô tỉ

Số vô tỉ là số có thể viết dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn.

a) Khái niệm về căn bậc hai:

Căn bậc hai của một số a không âm là một số x sao cho $x^2 = a$.

Chú ý:

- Số dương a có đúng hai căn bậc hai, một số dương kí hiệu là $\sqrt{a}$ và một số âm là $-\sqrt{a}$. Số 0 chỉ có một căn bậc hai là 0.
- Không được viết $\sqrt{9} = \pm 3$
- Với a, b $\geq$ 0 thì $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 89. Tìm căn bậc hai của 49; $\frac{16}{121}$

Giải

- Căn bậc hai của 49 là 7 và –7 vì $7^2 = 49$ và $(-7)^2 = 49$
- Căn bậc hai của $\frac{16}{121}$ là $\frac{4}{11}$ và $-\frac{4}{11}$ vì $\left(\frac{4}{11}\right)^2 = \frac{16}{121}$

và $\left(-\frac{4}{11}\right)^2 = \frac{16}{121}$

Bài 90. Tính $\sqrt{144}$, $\sqrt{(-5)^2}$, $-\sqrt{100}$.

Giải

$\sqrt{144} = 12$; $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$; $-\sqrt{100} = -10$

Bài 91. Nếu $\sqrt{x} = 3$ thì x^2 bằng:

A. 3 B.9 C.27 D.81

Hãy chọn câu trả lời đúng.

Giải

Chọn D

Bài 92. Tính:

a) $\sqrt{36} - \sqrt{25} - \sqrt{(-1)^2}$ b) $\sqrt{(-3)^4} - \sqrt{(-7)^2} + \sqrt{-(-4)^3}$

Giải

a) $\sqrt{36} - \sqrt{25} - \sqrt{(-1)^2} = 6 - 5 - 1 = 0$

b) $\sqrt{(-3)^4} - \sqrt{(-7)^2} + \sqrt{-(-4)^3}$

$= \sqrt{81} - \sqrt{49} + \sqrt{64} = 9 - 7 + 8 = 10$

Bài 93. Tìm x:

a) $\sqrt{x-5} = 2$ b) $\sqrt{3-x} = 20$

Giải

a) $\sqrt{x-5} = 2$ mà $2 > 0$

Do đó: $x - 5 = 2^2$

$x - 5 = 4$

$x = 4 + 5$

$x = 9$

b) $\sqrt{3-x} = 20$ mà $20 > 0$

Do đó $3 - x = 20^2$

$3 - x = 400$

$-x = 400 - 3$

$x = -397$

Bài 94. a) Điền số thích hợp vào các đẳng thức sau:

$\sqrt{1} = ...$

$\sqrt{1+2+1} = ...$

$\sqrt{1+2+3+2+1} = ...$

b) Viết tiếp 4 đẳng thức nữa vào "danh sách" trên.

Giải

a) $\sqrt{1} = 1$

$\sqrt{1+2+1} = 2$

$\sqrt{1+2+3+2+1} = 3$

b) $\sqrt{1+2+3+4+3+2+1} = 4$

$\sqrt{1+2+3+4+5+4+3+2+1} = 5$

$\sqrt{1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1} = 6$

$\sqrt{1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1} = 7$

Bài 95. Chứng tỏ rằng:

$$\sqrt{1+2+3+...+(n-1)+n+(n-1)+...+2+1} = n$$

với mọi $n \in N^*$.

Giải

$$\sqrt{1+2+3+...+(n-1)+n+(n-1)+...+2+1}$$

$$= \sqrt{2(1+2+3+...+n)-n}$$

$$= \sqrt{2.\frac{n(n+1)}{2}-n}$$

$$= \sqrt{n(n+1)-n}$$

$$= \sqrt{n^2+n-n} = \sqrt{n^2} = n$$

Bài 96. So sánh a) 3 và $\sqrt{10}$; b) $\sqrt{35}$ và 6

Giải

a) $9 < 10$ nên $\sqrt{9} < \sqrt{10}$ mà $\sqrt{9} = 3$

Vậy $3 < \sqrt{10}$

b) $35 < 36$ nên $\sqrt{35} < \sqrt{36}$ mà $\sqrt{36} = 6$

Vậy $\sqrt{35} < 6$

Bài 97. So sánh $\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{20} + \sqrt{12}$ và 12

Giải

$$\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{20} + \sqrt{12} < \sqrt{2,25} + \sqrt{6,25} + \sqrt{20,25} + \sqrt{12,25}$$

Mà $\sqrt{2,25} = 1,5$; $\sqrt{6,25} = 2,5$; $\sqrt{20,25} = 4,5$; $\sqrt{12,25} = 3,5$

Và $1,5 + 2,5 + 4,5 + 3,5 = 12$

Do vậy $\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{20} + \sqrt{12} < 12$

§12. SỐ THỰC

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Số thực

Số hữu tỉ và số vô tỉ được gọi chung là số thực.

Tập hợp các số thực kí hiệu là R.

Việc so sánh các số thực, tính toán trên các số thực thường được thực hiện trên các số thập phân hữu hạn biểu diễn gần đúng các số thực ấy.

2. Trục số thực

Mỗi số thực được biểu diễn bởi một điểm trên trục số và ngược lại.

Chú ý: Trong tập hợp các số thực cũng có các phép toán với các tính chất tương tự như các phép toán trong tập hợp số hữu tỉ.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 98. Điền các dấu, $\in$, $\notin$, $\subset$ thích hợp vào ô trống.

19 $\square$ Q   2006 $\square$ R   –42 $\square$ I

1,(63) $\square$ I   N $\square$ R   I $\square$ R

Giải

19 $\boxed{\in}$ Q   2006 $\boxed{\in}$ R   –42 $\boxed{\notin}$ I

1,(63) $\boxed{\notin}$ I   N $\boxed{\subset}$ R   I $\boxed{\subset}$ R

Bài 99. Tìm R $\cap$ Q; Q $\cap$ I

Giải

$R \cap Q = Q$; $Q \cap I = \varnothing$

Bài 100. So sánh các số thực:

a) 9,232323 và 19,232323 ...   b) –0,8912 và –0,89122 ...

Giải

a) 9,232323 < 19,232323 ...

b) –0,8912 > –0,89122 ...

Bài 101. Chứng minh rằng $\sqrt{3}$ là số vô tỉ

Giải

Giả sử $\sqrt{3}$ là số hữu tỉ, nên $\sqrt{3}$ có thể viết dưới dạng $\frac{a}{b}$ với a, $b \in N^*$ và ƯCLN (a,b) = 1

Ta có $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$

$3 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$

nên $a^2 = 3b^2$

do $a^2 \vdots 3$ mà 3 là số nguyên tố

nên $a \vdots 3$ đặt $a = 3m$ ($m \in N$)

Ta có $(3m)^2 = 3b^2$

$9m^2 = 3b^2$

$3m^2 = b^2$

Ta có $b^2 \vdots 3$ mà 3 là số nguyên tố nên $b \vdots 3$.

$a \vdots 3$; $b \vdots 3$ trái với ƯCLN (a,b) = 1

Vậy $\sqrt{3}$ là số hữu tỉ là sai.

Do đó $\sqrt{3}$ là số vô tỉ.

Bài 102. a) Có hai số vô tỉ nào mà tích là một số hữu tỉ hay không?

b) Có hai số vô tỉ nào mà tổng là một số hữu tỉ hay không?

Giải

a) Có chẳng hạn $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$

b) Có chẳng hạn $\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$

Bài 103. Tìm số nguyên x để M có giá trị là một số nguyên.

$$M = \frac{74}{\sqrt{x} - 1}$$

Giải

Khi x là số nguyên thì $\sqrt{x}$ hoặc là số nguyên hoặc là số vô tỉ.

Nếu $\sqrt{x}$ là số vô tỉ thì $\sqrt{x} - 1$ là số vô tỉ mâu thuẫn với $\frac{74}{\sqrt{x} - 1}$ là số nguyên.

Vậy $\sqrt{x}$ phải là số nguyên.

Do vậy $\sqrt{x} - 1$ là ước của 74.

Ta có $\sqrt{x} - 1 = 1; -1; 2; -2; 37; -37; 74; -74$.

Nên $\sqrt{x} = 2; 0; 3; -1; 38; -36; 75; -73$

$\sqrt{x}$	2	0	3	−1	38	−36	75	−73
x	4	0	9	Không có	1444	Không có	5625	Không có

ÔN TẬP CHƯƠNG I

Bài 104. Tìm x:

a) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{5}x = \frac{-3}{10}$ b) $2^{x+2} + 2^{x+1} + 2^{x} = 224$

Hướng dẫn

a) $x = \frac{-9}{26}$ b) $x = 5$

Bài 105. Tìm x:

a) $\left|x + \frac{1}{5}\right| = \frac{3}{25}$ b) $|x| + \frac{1}{5} = \frac{3}{25}$

Hướng dẫn

a) $\left|x + \frac{1}{5}\right| = \frac{3}{25}$

$x + \frac{1}{5} = \frac{3}{25}$ hoặc $x + \frac{1}{5} = \frac{-3}{25}$

b) $|x| = \frac{3}{25} - \frac{1}{5}$

Bài 106. Tìm hai số a, b ($b \neq 0$) biết $a + b = ab = \frac{a}{b}$

Hướng dẫn

$a = \frac{1}{2}$; $b = -1$

Bài 107. Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^{2006} = \frac{a^{2006}+b^{2006}}{c^{2006}+d^{2006}}$$

Hướng dẫn

Từ: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a-b}{c-d} = \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^{2006} \Rightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^{2006} = \left(\frac{b}{d}\right)^{2006}$

Bài 108. Cho $\frac{a}{5} = \frac{b}{4} = \frac{c}{3}$. và a.b.c = –480. Tìm a, b, c.

Hướng dẫn

Đặt $\frac{a}{5} = \frac{b}{4} = \frac{c}{3} = m$

Suy ra a = 5m; b = 4m; c = 3m

abc = –480 nên (5m)(4m)(3m) = –480

Bài 109. Cho $\frac{bz-cy}{a} = \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c}$.

Chứng minh rằng $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

Hướng dẫn

$$\frac{bz-cy}{a} = \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c}.$$

$$\Rightarrow \frac{abz-acy}{a^2} = \frac{bcx-baz}{b^2} = \frac{acy-bcx}{c^2}.$$

$$\Rightarrow \frac{abz-acy}{a^2} = \frac{abz-acy+bcx-abz+acy-bcx}{a^2+b^2+c^2} = \frac{0}{a^2+b^2+c^2} = 0$$

Vậy bz – cy = cx – az = ay – bx = 0.

Suy ra $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

Bài 110. Chứng tỏ rằng phân số $\frac{22n+5}{143n}$

Với n ∈ N không thể viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn.

Hướng dẫn

$22n + 5 \not\vdots\ 11$; $\quad 143n \vdots\ 11$

Bài 111. Cho A là số lẻ không tận cùng bằng 5. Chứng minh rằng tồn tại một bội của A gồm chữ số 9.

Hướng dẫn

A là số lẻ không tận cùng bằng 5 nên $\frac{1}{A}$ viết dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

Ta có $\frac{1}{A} = \frac{\overline{a_1a_2...a_n}}{\underbrace{99...99}_{n}} \Rightarrow \underbrace{99...99}_{n} = A.\overline{a_1a_2...a_n}$

Bài 112. Tìm x biết $x = \sqrt{x}$

Hướng dẫn

$x \geq 0$ và $x = x^2$

Bài 113. Chứng tỏ rằng:

$\sqrt{2006} - \sqrt{2003} > \sqrt{2005} - \sqrt{2004}$

Hướng dẫn

$\sqrt{2006} > \sqrt{2005}$; $-\sqrt{2003} > -\sqrt{2004}$

Bài 114. Cho $a \in Q$, $b \in I$

Chứng minh rằng a + b là số vô tỉ

Hướng dẫn

Giả sử $a + b = c$ là một số hữu tỉ

Ta có: $b = c - a$

Mà: $a \in Q$, $c \in Q$ nên $b \in Q$

Điều này trái với giả thiết là $b \in I$.

Chương II: HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

§1. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa:

Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức: $y = kx$, với k là hằng số khác 0, thì y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ k.

2. Tính chất:

Nếu hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau thì:

- Tỉ số hai giá trị tương ứng của chúng luôn không đổi.
- Tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 115. Cho biết y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ $k = \frac{-2}{7}$. Hỏi x tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ nào?

Giải

$y = \frac{-2}{7}x$ nên $x = -\frac{7}{2}y$

Vậy x tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ $-\frac{7}{2}$

Bài 116. Cho biết hai đại lượng x và y tỉ lệ thuận với nhau và khi $x = 10$ thì $y = -8$.

a) Tìm hệ số tỉ lệ k của y đối với x.

b) Hãy biểu diễn y theo x.

b) Tính giá trị của y khi $x = 2$; $x = \frac{-3}{8}$

Giải

a) Hai đại lượng x và y tỉ lệ thuận với nhau và khi $x = 10$ thì $y = -8$ nên ta có $y = kx$.

$\Rightarrow -8 = k.10 \Rightarrow k = \frac{-8}{10} = -0,8$

b) $y = kx$ mà $k = -0,8$ nên $y = -0,8x$

c) Khi $x = 2$ thì $y = -0,8.2 = -1,6$

Khi $x = \frac{-3}{8}$ thì $y = -0,8.\frac{-3}{8} = 0,3$

Bài 117. Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau.

x	−4	−2	1	3	5
y				−1,8	

Giải

$k = \frac{-1,8}{3} = -0,6$, do đó ta có.

x	−4	−2	1	3	5
y	2,4	1,2	−0,6	−1,8	-3

Bài 118. Biết rằng y_1 tỉ lệ thuận với x_1 theo hệ số tỉ lệ a ($a \neq 0$), y_2 tỉ lệ thuận với x_2 theo hệ số tỉ lệ a. Hỏi $y_1 + y_2$ có tỉ lệ thuận với $x_1 + x_2$ không? Nếu có, hệ số tỉ lệ là bao nhiêu?

Giải

y_1 tỉ lệ thuận với x_1 theo hệ số tỉ lệ a nên $y_1 = ax_1$.

y_2 tỉ lệ thuận với x_1 theo hệ số tỉ lệ a nên $y_2 = ax_2$.

Ta có $y_1 + y_2 = ax_1 + ax_2 = a(x_1 + x_2)$

Vậy $y_1 + y_2$ tỉ lệ thuận với $x_1 + x_2$ theo hệ số tỉ lệ a.

Bài 119. Biết rằng y_1 tỉ lệ thuận với x_1 theo hệ số tỉ lệ a ($a \neq 0$), y_2 tỉ lệ thuận với x_2 theo hệ số tỉ lệ a. Hỏi $y_1 - y_2$ có tỉ lệ thuận với $x_1 - x_2$ không? Nếu có, hệ số tỉ lệ là bao nhiêu?

Giải

y_1 tỉ lệ thuận với x_1 theo hệ số tỉ lệ a nên $y_1 = ax_1$

y_2 tỉ lệ thuận với x_2 theo hệ số tỉ lệ a nên $y_2 = ax_2$

Ta có $y_1 - y_2 = ax_1 - ax_2 = a(x_1 - x_2)$

Vậy $y_1 - y_2$ tỉ lệ thuận với $x_1 - x_2$ theo hệ số tỉ lệ a.

Bài 120. Cho x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận biết hai giá trị x_1 và x_2 có $x_1 + x_2 = -3$ thì hai giá trị tương ứng y_1 và y_2 của y có $y_1 + y_2 = 6$.

a) Viết công thức mô tả mối liên hệ giữa x và y.

b) Điền vào bảng giá trị dưới đây:

x	–4		1		
y		6		–8	–11

Giải

Ta có: $a = \dfrac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \dfrac{6}{-3} = -2$

Vậy công thức liên hệ giữa x và y là $y = -2x$

b) Ta có bảng sau:

x	–4	–3	1	4	5,5
y	8	6	–2	–8	–11

Bài 121. Cho biết y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ a, x tỉ lệ thuận với z theo hệ số tỉ lệ b. Chứng tỏ y tỉ lệ thuận với z và tìm hệ số tỉ lệ.

Giải

Ta có y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ a nên $y = ax$, x tỉ lệ thuận với z theo hệ số tỉ lệ b nên $x = bz$.

Do đó $y = ax = a(bz) = (ab)z$

Vậy y tỉ lệ thuận với z theo hệ số tỉ lệ ab.

§2. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

A/ KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Tính chất của đại lượng tỉ lệ thuận

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \ldots$$

2. Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau.

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{x_1 + x_2 + x_3} = \frac{y_1 - y_2 + y_3}{x_1 - x_2 + x_3}$$

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 122. Các đại lượng x và y có tỉ lệ thuận với nhau hay không nếu:

a)

x	−3	−2	−1	4	6
y	15	10	5	−20	−30

b)

x	−2	−1	3	4	5
y	−8	−4	12	16	18

Giải

a) Ta có $\frac{15}{-3} = \frac{10}{-2} = \frac{5}{-1} = \frac{-20}{4} = \frac{-30}{6}$

Vậy các đại lượng x và y tỉ lệ thuận với nhau.

b) Ta có: $\frac{16}{4} \neq \frac{18}{5}$

Vậy các đại lượng x và y không tỉ lệ thuận.

Bài 123. Cứ 100kg thóc thì cho 62kg gạo. Hỏi 3 tấn thóc thì cho bao nhiêu kilôgam gạo?

Giải

Vì khối lượng gạo y (kg) tỉ lệ với khối lượng thóc x (kg), ta có $y = kx$

$y = 62$, $x = 100$ nên $62 = k.100$

$\Rightarrow k = \frac{62}{100} = 0{,}62$

$y = 0{,}62x$ mà 3 tấn = 3000kg

Ta có $y = 0{,}62.3000 = 1860$ (kg)

Trả lời: 3 tấn thóc thì cho 1860 kilôgam gạo.

Bài 124. Chia số 150 thành ba phần tỉ lệ thuận với 2, 4, 9. Tìm ba phần trên.

Giải

Gọi ba phần cần tìm là x, y, z. Ta có $x + y + z = 150$

x, y, z tỉ lệ thuận với 2, 4, 9 nên $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{9}$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{9} = \frac{x+y+z}{2+4+9} = \frac{150}{15} = 10$$

- $\frac{x}{2} = 10 \Rightarrow x = 10.2 = 20$
- $\frac{y}{4} = 10 \Rightarrow y = 10.4 = 40$
- $\frac{z}{9} = 10 \Rightarrow z = 10.9 = 90$

Vậy ba phần cần tìm là 20, 40, 90.

Bài 125. Tìm ba số x, y, z biết chúng tỉ lệ thuận với 5, 9, 3 và $y - z = 18$.

Giải

Theo đề bài ta có $\frac{x}{5} = \frac{y}{9} = \frac{z}{3}$ và $y - z = 18$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{9} = \frac{z}{3} = \frac{y-z}{9-3} = \frac{18}{6} = 3$$

- $\frac{x}{5} = 3 \Rightarrow x = 3.5 = 15$
- $\frac{y}{9} = 3 \Rightarrow y = 3.9 = 27$
- $\frac{z}{3} = 3 \Rightarrow z = 3.3 = 9$

Bài 126. Biết các cạnh của tam giác tỉ lệ thuận với 3, 6, 7 và chu vi của nó là 64cm. Tính độ dài các cạnh của tam giác đó.

Giải

Gọi độ dài các cạnh của tam giác lần lượt là a, b, c (đơn vị cm)

Ta có $a + b + c = 64$

a, b, c tỉ lệ với 3, 6, 7 nên $\frac{a}{3} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7}$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{3+6+7} = \frac{64}{16} = 4$$

- $\frac{a}{3} = 4 \Rightarrow a = 4.3 = 12$
- $\frac{b}{6} = 4 \Rightarrow b = 4.6 = 24$
- $\frac{c}{7} = 4 \Rightarrow c = 4.7 = 28$

Vậy độ dài các cạnh của tam giác này lần lượt là 12cm, 24cm và 28cm.

Bài 127. Chia số 183 thành 3 phần sao cho phần thứ nhất và phần thứ hai tỉ lệ với 3 và 5, phần thứ nhất và phần thứ ba tỉ lệ với 5 và 7. Tìm ba phần trên.

Giải

Gọi ba phần: phần thứ nhất, phần thứ hai, phần thứ ba lần lượt là a, b, c.

Theo đầu bài ta có $a + b + c = 183$;

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5}; \frac{a}{5} = \frac{c}{7}$$

Do đó $\frac{a}{3}.\frac{1}{5} = \frac{b}{5}.\frac{1}{5}, \frac{a}{5}.\frac{1}{3} = \frac{c}{7}.\frac{1}{3}; a + b + c = 183$

Nên $\frac{a}{15} = \frac{b}{25} = \frac{c}{21} = \frac{a+b+c}{15+25+21} = \frac{183}{61} = 3$

- $\frac{a}{15} = 3 \Rightarrow a = 3.15 = 45$
- $\frac{b}{25} = 3 \Rightarrow b = 3.25 = 75$
- $\frac{c}{21} = 3 \Rightarrow c = 3.21 = 63$

Vậy ba phần được chia là 45, 75 và 63

Bài 128. Độ dài ba cạnh của một tam giác tỉ lệ với 3, 4, 6. Ba chiều cao tương ứng với ba cạnh đó tỉ lệ với ba số nào?

Giải

Gọi độ dài ba cạnh của tam giác là a, b, c, ba chiều cao tương ứng là x, y, z và diện tích của tam giác là x.

$$a = \frac{2S}{x}, \quad b = \frac{2S}{y}, \quad c = \frac{2S}{z}$$

Theo đầu bài ta có: $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{6}$

Nên $\frac{2S}{3x} = \frac{2S}{4y} = \frac{2S}{6z}$

$\Rightarrow \quad 3x = 4y = 6z$

$\Rightarrow \quad \frac{3x}{12} = \frac{4y}{12} = \frac{6z}{12}$

$\Rightarrow \quad \frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$

Vậy ba chiều cao tương ứng tỉ lệ với 4, 3, 2.

§3. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa:

Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức:

$y = \frac{a}{x}$ hay xy = a (a là một hằng số khác 0) thì ta nói y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ a.

2. Tính chất:

Nếu hai đại lượng tỉ lệ nghịch với nhau thì:

- Tích hai giá trị của chúng luôn không đổi (bằng hệ số tỉ lệ).
- Tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng nghịch đảo của tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 129. Cho biết hai đại lượng x và y tỉ lệ nghịch với nhau và khi x = 10 thì y = –12.

a) Tìm hệ số tỉ lệ.

b) Hãy biểu diễn y theo x.

c) Tính giá trị của y khi x = 4; x = –8

Giải

a) Khi đại lượng x và y tỉ lệ nghịch với nhau và khi x = 10 thì y = –12 nên ta có a = xy.

b) $y = \frac{a}{x}$ mà a = –120 nên $y = \frac{-120}{x}$

c) Khi x = 4 thì $y = \frac{-120}{4} = -30$

Khi x = –8 thì $y = \frac{-120}{-8} = 15$.

Bài 130. Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Điền số thích hợp vào ô trống.

x	−6	−4	−1	3	8
y				−8	

Giải

a = xy = 3.(−8) = −24. Do đó, ta có:

x	−6	−4	−1	3	8
y	4	6	24	−8	−3

Bài 131. Theo bảng giá trị dưới đây x và y có phải là hai đại lượng tỉ lệ nghịch không?

a)

x	−4	−2	−1	5	10
y	−15	−30	−60	12	4

b)

x	−5	−2	−1	5	10
y	10	25	50	−10	−5

Giải

a) Ta có $5.12 \neq 10.4$

Vậy các đại lượng x và y không tỉ lệ nghịch

b) Ta có $-5.10 = -2.25 = -1.50 = 5.(-10) = 10.(-5)$

Vậy các đại lượng x và y tỉ lệ nghịch với nhau.

Bài 132. 6 công nhân cùng làm trong 4 giờ thì xong công việc. Nếu số công nhân tăng thêm 2 người thì thời gian hoàn thành công việc này giảm mấy giờ? (Năng suất công việc của mọi người như nhau).

Giải

Khi tăng thêm 2 người thì số công nhân có là:

$6 + 2 = 8$ (người)

Vì công việc không thay đổi nên số công nhân và số giờ làm là tỉ lệ nghịch với nhau.

Giả sử 8 công nhân làm công việc đó trong x giờ.

Ta có: $\frac{6}{8} = \frac{x}{4}$

$\Rightarrow \quad x = \frac{6.4}{8} = 3$

Vậy thời gian hoàn thành công việc giảm được 4 – 3 = 1 (giờ)

Bài 133. Cho hai đại lượng tỉ lệ nghịch x và y; x_1 và x_2 là hai giá trị của x; y_1 và y_2 là hai giá trị tương ứng của y. Biết $x_1 = 3$; $x_2 = 5$ và $y_1 - y_2 = -8$. Tính y_1 và y_2.

Giải

Ta có $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow \frac{y_1}{x_2} = \frac{y_2}{x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}$

Vì $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $y_1 - y_2 = -8$

Do đó $\frac{y_1}{5} = \frac{y_2}{3} = \frac{-8}{5-3} = \frac{-8}{2} = -4$

- $\frac{y_1}{5} = -4 \Rightarrow y_1 = -4.5 = -20$
- $\frac{y_2}{3} = -4 \Rightarrow y_2 = -4.3 = -12$

§4. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

A/ KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Tính chất của đại lượng tỉ lệ nghịch

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

2. Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau.

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow \frac{y_1}{x_2} = \frac{y_2}{x_1} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Nếu y tỉ lệ nghịch với x thì y tỉ lệ **thuận** với $\frac{1}{x}$

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 134. Cho biết hai đại lượng x và y tỉ lệ nghịch với nhau. Điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau:

x	–8		–2	–1	0,5		
y		2	4			–4	–1

Giải

Ta có: a = –2.4 = –8

Từ đó, điền được các số thích hợp vào ô trống như sau:

x	–8	–4	–2	–1	0,5	2	8
y	1	2	4	8	–16	–4	–1

Bài 135. Cho biết 4 người làm cỏ một cánh đồng hết 5 giờ. Hỏi 10 người (với cùng năng suất như thế) làm cỏ cánh đồng đó hết bao nhiêu thời gian?

Giải

Với cùng một cánh đồng số người làm cỏ hết cánh đồng và số người làm việc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Gọi số giờ để 10 người làm cỏ hết cánh đồng là x (giờ).

Theo đầu bài ta có: 10x = 4.5

$$\Rightarrow \quad x = \frac{4.5}{10} = 2$$

Vậy 10 người làm cỏ cánh đồng đó hết 2 giờ.

Bài 136. Ba đội máy san đất làm ba khối lượng công việc như nhau. Đội thứ nhất hoàn thành công việc trong 4 ngày, đội thứ hai trong 6 ngày và đội thứ ba trong 8 ngày. Hỏi mỗi đội có bao nhiêu máy (có cùng năng suất), biết rằng đội thứ nhất nhiều hơn đội thứ hai 4 máy.

Giải

Với cùng năng suất số máy cày và số ngày làm hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Gọi số máy của ba đội lần lượt là a (máy), b(máy), c(máy).

Ta có 4a = 6b = 8c, a – b = 4

$$\Rightarrow \frac{a}{\frac{1}{4}} = \frac{b}{\frac{1}{6}} = \frac{c}{\frac{1}{8}} = \frac{a-b}{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}} = 48$$

- $\frac{a}{\frac{1}{4}} = 48 \Rightarrow a = 48.\frac{1}{4} = 12$

- $\frac{b}{\frac{1}{6}} = 48 \Rightarrow b = 48.\frac{1}{6} = 8$

- $\frac{c}{\frac{1}{8}} = = 48 \Rightarrow c = 48.\frac{1}{8} = 6$

Số máy của ba đội lần lượt là 12 máy, 8 máy, 6 máy.

Bài 137. Một vật chuyển động trên các cạnh của một hình vuông. Trên hai cạnh đầu vật chuyển động với vận tốc 5m/giây, trên cạnh thứ ba với vận tốc 4m/giây và trên cạnh thứ tư với vận tốc 3m/giây. Hỏi độ dài của cạnh hình vuông biết rằng tổng số thời gian vật chuyển động trên 4 cạnh là 1 phút 58 giây.

Giải

1 phút 58 giây = 118 giây

Thời gian để vật đi được một quãng đường cố định và vận tốc của nó là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Gọi x, y, z, t là thời gian tính bằng giây để vật chuyển động theo thứ tự trên các cạnh của hình vuông. Ta phải chia 118 thành bốn phần tỉ lệ nghịch với 5; 5; 4; 3.

Ta có:

$$x + y + z + t = 118$$

$$5x = 5y = 4z = 3t \text{ (= độ dài cạnh hình vuông)}$$

Từ đó:

$$\frac{x}{\frac{1}{5}} = \frac{y}{\frac{1}{5}} = \frac{z}{\frac{1}{4}} = \frac{t}{\frac{1}{3}} = \frac{x+y+z+t}{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}} = \frac{118}{\frac{59}{60}} = 120$$

Vậy độ dài cạnh hình vuông là 120m.

Bài 138. Ba xí nghiệp cùng xây dựng chung một cái cầu hết 450 triệu đồng. Xí nghiệp I có 60 xe ở cách cầu 1,2km, xí nghiệp 2 có 90 xe ở cách cầu 1,5km, xí nghiệp III có 20 xe ở cách cầu 0,5km.

Hỏi mỗi xí nghiệp phải trả cho việc xây dựng cầu bao nhiêu tiền, biết rằng số tiền phải trả tỉ lệ thuận với số xe và tỉ lệ nghịch với khoảng cách từ xí nghiệp đến cầu?

Giải

Gọi số tiền mỗi xí nghiệp I, II, III phải trả lần lượt là x, y, z (triệu đồng).

Theo đầu bài ta có:

$$x + y + z = 450$$

$$x : y : z = \frac{60}{1{,}2} : \frac{90}{1{,}5} : \frac{20}{0{,}5}$$

Do đó: $\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{4} = \frac{x + y + z}{5 + 6 + 4} = \frac{450}{15} = 30$

- $\frac{x}{5} = 30 \Rightarrow x = 30.5 = 150$
- $\frac{y}{6} = 30 \Rightarrow y = 30.6 = 180$
- $\frac{z}{4} = 30 \Rightarrow z = 30.4 = 120$

Vậy số tiền mỗi xí nghiệp I, II, III theo thứ tự phải trả là 150 triệu đồng, 180 triệu đồng, 120 triệu đồng.

§5. HÀM SỐ

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Khái niệm hàm số:

Giả sử x và y là hai đại lượng biến thiên và nhận các giá trị số.

Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là hàm số của x và x gọi là biến số.

Chú ý:

- Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị thì y được gọi là hàm hằng.
- Hàm số được gọi cho bằng bảng, bằng công thức... Khi hàm số được cho bằng công thức thì ta hiểu rằng biến số x khi nhận những giá trị làm cho công thức có nghĩa.
- Hàm số thường được kí hiệu là y = f(x).

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 139. Cho bảng giá trị tương ứng của hai đại lượng x và y.

x	–3	–2	–1	2	4	5
y	9	6	3	–6	–12	–15

a) Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không?

b) Tìm giá trị của y tại x = –3; x = –1; x = 5.

Giải

a) Vì mỗi giá trị của x xác định chỉ một giá trị tương ứng của y nên đại lượng của y là hàm số của đại lượng x.

b) Khi x = –3 thì y = 9; khi x = –1 thì y = 3; khi x = 5 thì y = –15.

Bài 140. Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 5$

Tính $f(-2)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Giải

$$f(-2) = (-2)^2 - 2(-2) + 5 = 4 + 4 + 5 = 13$$

$$f(0) = 0^2 - 2.0 + 5 = 0 - 0 + 5 = 5$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2.\frac{1}{2} + 5 = \frac{1}{4} - 1 + 5 = 4\frac{1}{4}$$

Bài 141. Cho hàm số f được xác định bởi công thức

$f(x) = \begin{cases} 3x - 4 \text{ nếu } x \geq 0 \\ x\text{-}4 \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$. Tính f(1); f(0); f(–2).

Giải

$1 > 0$ nên $f(1) = 3.1 - 4 = 3 - 4 = -1$

$f(0) = 3.0 - 4 = 0 - 4 = -4$

$-2 < 0$ nên $f(-2) = -2 - 4 = -6$

Bài 142. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{-4}{x}$

Hãy điền các giá trị tương ứng của hàm số vào bảng sau:

x	−8	−4	−1	1	2	6
$f(x) = \frac{-4}{x}$						

Giải

x	−8	−4	−1	1	2	6
$f(x) = \frac{-4}{x}$	$\frac{1}{2}$	1	4	−4	−2	$-\frac{2}{3}$

Bài 143. Hàm số y = f(x) được cho bởi bảng sau:

x	−4	−2	−1	0	2	4
y = f(x)	4	1	$\frac{1}{4}$	0	1	4

Viết tập hợp các cặp số xác định hàm số trên.

Giải

Từ bảng trên ta biết được tập hợp các cặp số xác định hàm số là:

$$\left\{(-4;4);\ (-2;1);\ \left(-1;\frac{1}{4}\right);\ (0;0);\ (2;1);\ (4;4)\right\}$$

Bài 144. Cho hàm số được xác định như sau:

$y = f(x) = \begin{cases} x + 24 \text{ khi } x \geq 0 \\ -x + 24 \text{ khi } x < 0 \end{cases}$ Có cách nào viết gọn công thức không?

Giải

$y = f(x) = |x| + 24$

Bài 145. Cho hàm số $y = -\frac{2}{5}x$. Tìm giá trị của x sao cho.

a) y nhận giá trị dương; b) y nhận giá trị âm.

Giải

a) y nhận giá trị dương thì $-\frac{2}{5}x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

b) y nhận giá trị âm thì $-\frac{2}{5}x < 0 \Leftrightarrow x > 0$

Bài 146. Các quy tắc sau có xác định một hàm số từ Q đến Q không:

a) Cho tương ứng mỗi số hữu tỉ x với số đối của nó.

b) Cho tương ứng với mỗi số hữu tỉ x là nghịch đảo của nó.

Giải

a) Quy tắc cho tương ứng mỗi số hữu tỉ x với số đối của nó là một hàm số từ Q đến Q vì mọi số hữu tỉ đều có duy nhất một số đối –x.

b) Quy tắc cho tương ứng mỗi số hữu tỉ x và nghịch đảo của nó không phải là một hàm số từ Q đến Q vì số $0 \in Q$ không tương ứng với số nào cả (số 0 không có số nghịch đảo).

Bài 147. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^2$. Chứng tỏ rằng $f(x) = f(-x)$

Giải

$f(x) = 2x^2$; $f(-x) = 2.(-x)^2 = 2x^2$

Vậy $f(x) = f(-x)$

Bài 148. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2006}{x}$. Chứng tỏ rằng $f(x) = -f(-x)$

Giải

$f(x) = \frac{2006}{x}$; $f(-x) = \frac{2006}{-x} = -\frac{2006}{x}$

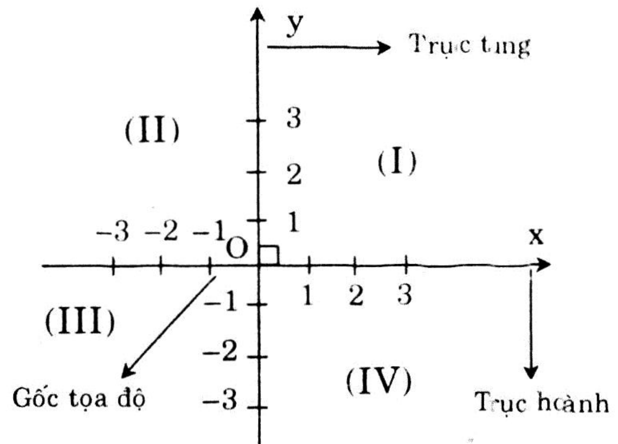
Vậy $f(x) = -f(-x)$

§6. MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Mặt phẳng tọa độ:

Mặt phẳng có hệ trục tọa độ Oxy gọi là mặt phẳng tọa độ Oxy.



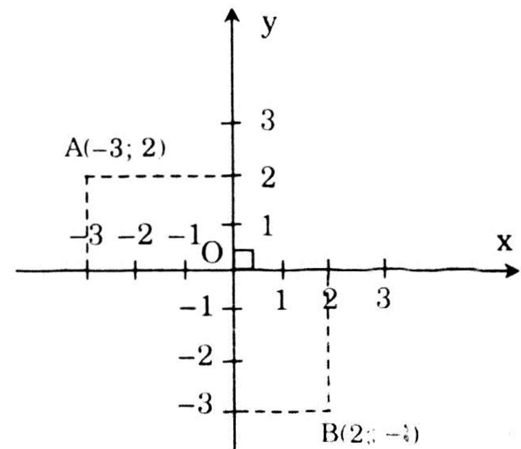
2. Tọa độ của một điểm trong mặt phẳng tọa độ:

Trên mặt phẳng tọa độ:

– Mỗi điểm M xác định một cặp số (x_0, y_0). Ngược lại, mỗi cặp số (x_0, y_0) xác định một điểm M.

– Cặp số (x_0, y_0) gọi là tọa độ của điểm M, x_0 là hoành độ, y_0 là tung độ của điểm M.

– Điểm M có tọa độ (x_0, y_0) được kí hiệu là: $M(x_0, y_0)$.



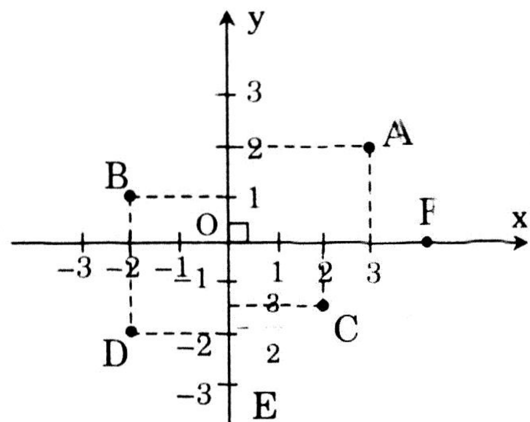
B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 149. Viết tọa độ các điểm A, B, C, D, E, F trong hình vẽ bên.

Giải

A(3; 2); B(−2; 1); C(2; $-\frac{3}{2}$);

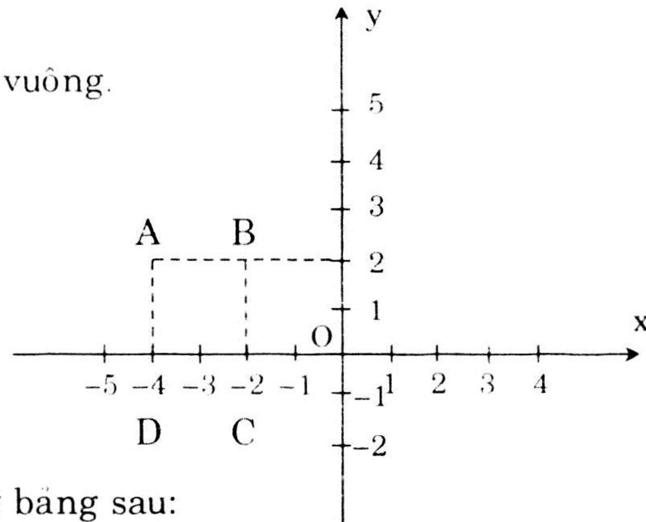
D(−2; −2); E(0; −3); F(4; 0)



Bài 150. Vẽ một hệ trục tọa độ và đánh dấu các điểm A(−4; 2); B(−2; 2); C(−2; 0); D(−4; 0). Tứ giác ABCD là hình gì?

Giải

Tứ giác ABCD là hình vuông.

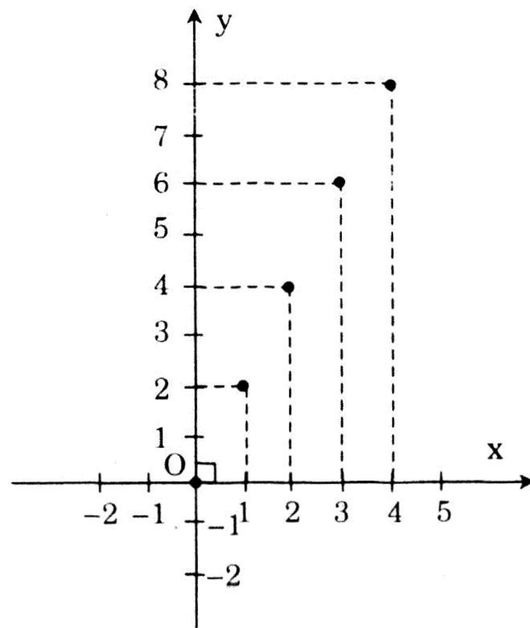


Bài 151. Hàm số y cho trong bảng sau:

x	0	1	2	3	4
y	0	2	4	6	8

a) Viết tất cả các cặp giá trị tương ứng (x; y) của hàm số trên.

b) Vẽ một hệ trục tọa độ Oxy và xác định các biểu diễn các cặp giá trị tương ứng của x và y ở câu a.



Giải

a) Các cặp giá trị tương ứng (x; y) của hàm số trên là (0; 0); (1; 2); (2; 4); (3; 6); (4; 8).

b) Các biểu diễn các cặp giá trị tương ứng của x và y ở câu a.

Bài 152. Trên hệ trục tọa độ Oxy lấy điểm A.

Điểm A(x; y) nằm ở góc phần tư nào của hệ tọa độ nếu:

a) $x > 0; y > 0$

b) $x > 0; y < 0$

c) $x < 0; y > 0$

d) $x < 0; y < 0$

Giải

a) Nếu x > 0; y > 0 thì A(x, y) ở góc phần tư I.

b) Nếu x > 0; y < 0 thì A(x, y) ở góc phần tư IV.

c) Nếu x < 0; y > 0 thì A(x, y) ở góc phần tư II.

d) Nếu x < 0; y < 0 thì A(x, y) ở góc phần tư III.

Bài 153. Tìm trên mặt phẳng tọa độ Oxy những điểm có:

a) Hoành độ bằng 3. b) Hoành độ bằng 0

c) Tung độ bằng –2. d) Tung độ bằng 0.

Giải

a) Tất cả các điểm nằm trên đường thẳng song song với trục tung và cắt trục hoành tại điểm 3.

b) Tất cả các điểm nằm trên trục tung Oy.

c) Tất cả các điểm nằm trên đường thẳng song song với trục hoành và cắt trục tung tại điểm –2.

d) Tất cả các điểm nằm trên trục hoành Ox.

§7. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ y = ax (a ≠ 0)

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Đồ thị của hàm số là gì?

Đồ thị của hàm số y = f(x) là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng (x, y) trên mặt phẳng tọa độ.

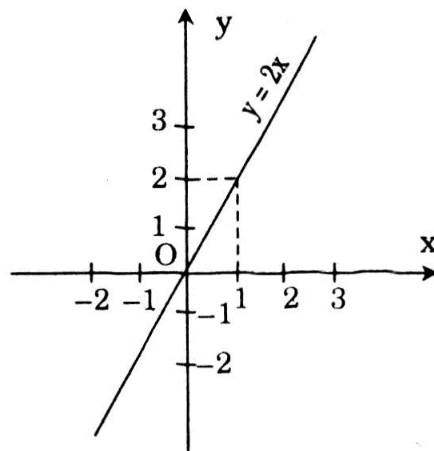
2. Đồ thị của hàm số y = ax (a ≠ 0)

Đồ thị của hàm số y = ax (a ≠ 0) là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ.

Cách vẽ:

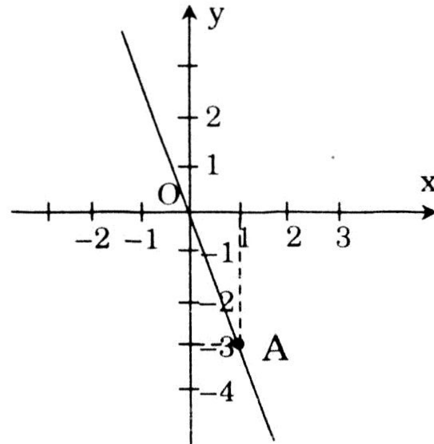
Xác định điểm A (A khác O) nằm trên đồ thị.

Thông thường A(1; a) đường thẳng OA là đồ thị của hàm số y = ax.



B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 154. Vẽ đồ thị của hàm số y = –3x.



Giải

Đồ thị của hàm số y = –3x là đường thẳng đi qua hai điểm O(0; 0) và A(1; –3).

Bài 155. Đồ thị hàm số y = ax nằm ở góc phần tư nào của mặt phẳng tọa độ Oxy nếu:

a) a > 0 b) a < 0

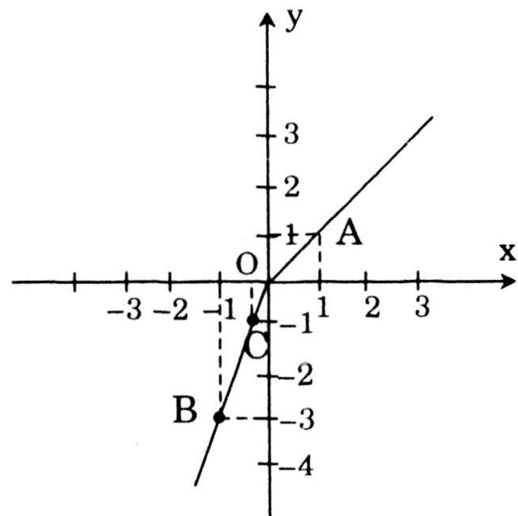
Giải

a) Đồ thị của hàm số y = ax nằm ở góc phần I và III nếu a > 0

b) Đồ thị của hàm số y = ax nằm ở góc phần II và IV nếu a < 0

Bài 156. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \begin{cases} x \text{ với } x \geq 0 \\ 3x \text{ với } x < 0 \end{cases}$

Giải



- Xét x ≥ 0

  Cho x = 0 ta có y = 0. Điểm O(0; 0) thuộc đồ thị

  Cho x = 1 ta có y = 1. Điểm A(1; 1) thuộc đồ thị.

- Xét x < 0

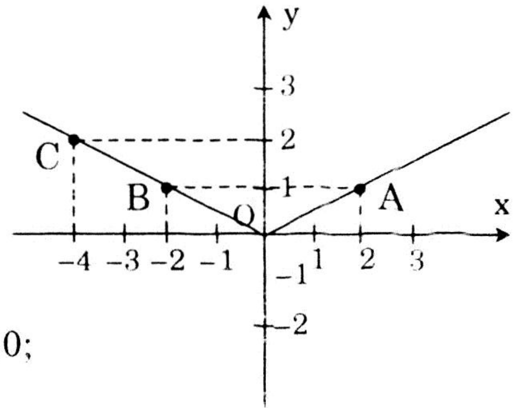
  Cho x = –1 ta có y = –3. Điểm B(–1; –3) thuộc đồ thị.

  Cho $x = -\frac{1}{3}$ ta có y = –1. Điểm $C(-\frac{1}{3}; -1)$ thuộc đồ thị.

  Đồ thị hàm số là hai tia OA và OB.

Bài 157. Vẽ đồ thị của hàm số sau $y = \frac{1}{2}|x|$

Giải



$$y = \frac{1}{2}|x| = \begin{cases} \frac{1}{2}x \text{ với } x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}x \text{ với } x < 0 \end{cases}$$

- Xét $x \geq 0$

  Cho $x = 0$, ta có $y = 0$. Điểm O(0; 0) thuộc đồ thị.

  Cho $x = 2$, ta có $y = 1$. Điểm A(2; 1) thuộc đồ thị.

- Xét $x < 0$

  Cho $x = -2$, ta có $y = 1$. Điểm B(−2; 1) thuộc đồ thị.

  Cho $x = -4$, ta có $y = 2$. Điểm C(−4; 2) thuộc đồ thị.

  Đồ thị hàm số là hai tia OA và OB

Bài 158. Những điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số $y = 2x$.

A(−2; −1), B($-\frac{1}{2}$; −1), C(−1; $-\frac{1}{2}$), D(3; 6)?

Giải

- $y = f(x) = 2x$.

  $f(-2) = 2.(-2) = -4 \neq -1$.

Vậy A(−2; −1) không thuộc đồ thị.

  $f(-\frac{1}{2}) = 2.(-\frac{1}{2}) = -1 = -1$

Vậy B($-\frac{1}{2}$; −1) thuộc đồ thị.

- $f(-1) = 2.(-1) = -2 \neq -\frac{1}{2}$

Vậy C(−1; $-\frac{1}{2}$) không thuộc đồ thị.

- $f(3) = 2.3 = 6 = 6$

Vậy D(3; 6) thuộc đồ thị.

Bài 159. Cho hàm số y = mx.

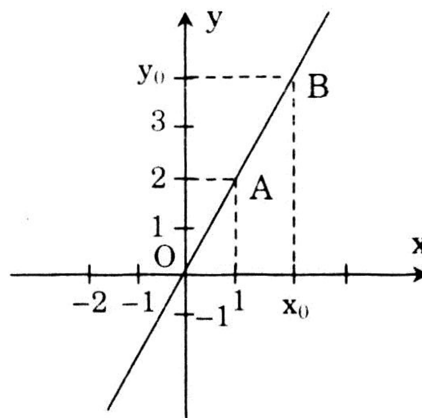
Xác định m, biết rằng đồ thị của hàm số đi qua điểm A(4; −1).

Giải

Điểm A(4; −1) thuộc đồ thị hàm số nên −1 = m.4 $\Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{4}$

Bài 160. Cho hình bên. Tính $\dfrac{y_0 + 2}{x_0 + 1}$

Giải



Dễ thấy đường thẳng AB là đồ thị của hàm số y = 2x.

Hai điểm A, B thuộc đồ thị hàm số này nên hoành độ và tung độ là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

$\dfrac{y_0}{x_0} = \dfrac{2}{1} = \dfrac{y_0 + 2}{x_0 + 1}$

Vậy $\dfrac{y_0 + 2}{x_0 + 1} = 2$.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

Bài 161. a) Tìm ba số a, b, c biết rằng chúng theo thứ tự tỉ lệ thuận với 3; 2; 5 và b − c = −315.

b) Tìm ba số a, b, c biết rằng chúng tỉ lệ nghịch với 2; 4; 5 và a + b + c = −95.

Hướng dẫn

a) $\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{2} = \dfrac{c}{5}$; b − c = 315

b) 2a = 4b = 5c; a + b + c = −95

Bài 162. Bốn đội máy cày gồm 36 máy làm trên bốn cánh đồng giống nhau. Đội I hoàn thành công việc trong 4 ngày, đội II trong 10 ngày, đội III trong 12 ngày, đội IV trong 6 ngày. Hỏi mỗi đội có mấy máy cày? Biết rằng năng suất của mỗi máy như nhau và mỗi máy cùng làm một số giờ như nhau.

Hướng dẫn

Gọi x, y, x, t lần lượt là số máy cày của đội I, đội II, đội III, đội IV, khối lượng công việc trên bốn cánh đồng giống nhau năng suất và thời gian làm việc mỗi ngày là như nhau nên số máy cày và thời gian hoàn thành công việc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch với nhau.

Do đó $x + y + z + t = 36$ và $4x = 10y = 12z = 6t$.

Bài 163. Trong mặt phẳng tọa độ, vẽ tam giác ABC có A(–1; 4), B(–1; –2), C(3; 4). Tam giác ABC là tam giác gì?

Hướng dẫn

Tam giác ABC vuông tại A.

Bài 164. Vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{2}{3}x$

b) $y = 3x - |x|$

Hướng dẫn

b) $y = 3x - |x| = \begin{cases} 3x - x \text{ (với } x \geq 0) \\ 3x + x \text{ (với } x < 0) \end{cases} = \begin{cases} 2x \text{ (với } x \geq 0) \\ 4x \text{ (với } x < 0) \end{cases}$

Bài 165. Xác định a để đồ thị hàm số y = ax đi qua điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = 2x^2$ và có hoành độ là $-\frac{1}{2}$

Hướng dẫn

$x = -\frac{1}{2}$ nên $y = 2.\left(\frac{-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

Vậy $M\left(\frac{-1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Đồ thị hàm số y = ax đi qua $M\left(\frac{-1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ nên $\frac{1}{2} = a.\left(\frac{-1}{2}\right)$

$\Rightarrow a = -1$

Bài 166 Cho hàm số $y = mx - |x|$. Xác định m để đồ thị hàm số đi qua điểm A(1;2). Vẽ đồ thị của hàm số đó.

Hướng dẫn

$2 = m.1 - |1| \Leftrightarrow m = 3$

Bài 167. Cho hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

a) Chứng tỏ rằng $f(x) = f(-x)$

b) Các điểm sau điểm nào thuộc đồ thị của hàm số $y = ax^2$

A(1; 2a); B(−1; a); C(0; 0); D(2; 3a); E(1; a)

Hướng dẫn

a) $f(x) = a.(x)^2 = ax^2$

Bài 168. Dùng đồ thị của hàm số để tìm x sao cho $\frac{1}{2}|x| < 1$

Hướng dẫn

Từ đồ thị bài 157. Các điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}|x| < 1$ nằm phía dưới đường thẳng y = 1 có hoành độ thỏa mãn là $-2 < x < 2$.

Bài 169. Xác định giao điểm của hai đồ thị y = 3 và y = −2x

Hướng dẫn

$A(x_A; y_A)$ là giao điểm của hai đồ thị nên có $y_A = 3$; $y_A = -2x_A$. Do đó $x_A = -\frac{3}{2}$.

Vậy $A\left(\frac{-3}{2}; 3\right)$

Bài 170. Xác định giao điểm của hai đồ thị y = 2x và $y = x^2$

Hướng dẫn

$M(x_M, y_M)$ là giao điểm của hai đồ thị nên có $y_M = 2x_M$ và $y_M = x_M^2$

Do đó $2x_M = x_M^2$

$\Leftrightarrow 2x_M - x_M^2 = 0$

$\Leftrightarrow x_M(2 - x_M) = 0$

$\Leftrightarrow x_M = 0$ hoặc $x_M = 2$

Nếu $x_M = 0$ thì $y_M = 0$

Nếu $x_M = 2$ thì $y_M = 2 . 2 = 4$

Giao điểm của hai đồ thị y = 2x và $y = x^2$ là O(0; 0) $(M \equiv 0)$ và M (2; 4)

Chương III: THỐNG KÊ

§1. THU THẬP SỐ LIỆU THỐNG KÊ, TẦN SỐ

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Thu thập số liệu, bảng số liệu thống kê ban đầu

Ví dụ:

Khi điều tra về học sinh nam của từng lớp trong một trường Trung học cơ sở, người điều tra lập bảng dưới đây:

Thứ tự	Lớp	Số học sinh nam
1	6A	20
2	6B	24
3	6C	20
4	6D	21
5	7A	20
6	7B	24
7	7C	24
8	7D	20
9	8A	24
10	8B	23
11	8C	20
12	9A	23
13	9B	24
14	9C	22

Việc làm trên của người điều tra là thu thập số liệu về vấn đề được quan tâm. Các số liệu trên được ghi lại trong một bảng, gọi là số liệu thống kê ban đầu.

2. Dấu hiệu

a) Dấu hiệu, đơn vị điều tra.

Vấn đề hay hiện tượng mà người điều tra quan tâm tìm hiểu được gọi là dấu hiệu.

Mỗi lớp là một đơn vị điều tra.

b) Giá trị của dấu hiệu, dãy giá trị của dấu hiệu ứng với mỗi đơn vị điều tra có một số liệu, số liệu đó còn được gọi là một giá trị của dấu hiệu.

Số các giá trị của dấu hiệu đúng bằng số các đơn vị điều tra (thường kí hiệu là n).

Dãy số các học sinh nam gọi là dãy giá trị của dấu hiệu.

3. Tần số của mỗi giá trị

– Các số liệu thu thập được khi điều tra về một dấu hiệu gọi là số liệu thống kê. Mỗi số liệu là một giá trị của dấu hiệu.

– Số tất cả các giá trị (không nhất thiết khác nhau) của dấu hiệu bằng số các đơn vị điều tra.

– Số lần xuất hiện của một giá trị trong dãy giá trị của dấu hiệu là tần số của giá trị đó.

Chú ý:

– Không phải mọi dấu hiệu đều có giá trị số.

– Trong trường hợp chỉ chú ý tới các giá trị của dấu hiệu thì bảng số liệu thống kê ban đầu có thể chỉ gồm các cột số.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 171. Số lượng học sinh nam của từng lớp trong một trường THCS được ghi lại trong bảng sau:

18	20	21	22	22
22	21	18	20	21
32	20	22	18	20

Dấu hiệu ở đây là gì? Số tất cả các giá trị của dấu hiệu? Hãy nêu các giá trị khác nhau của dấu hiệu, tìm tần số của từng giá trị đó.

Giải

Dấu hiệu: số học sinh nam trong mỗi lớp có tất cả 15 giá trị.

Các giá trị khác nhau của dấu hiệu là 18; 20; 21; 22; 32.

Tần số tương ứng của các giá trị lần lượt là: 3; 4; 3; 5; 4; 1.

Bài 172. Số con trong 20 gia đình ở khu phố A được thống kê như sau:

0	3	1	2	1	2	2	1	0	3
2	1	2	0	3	2	0	1	2	1

a) Dấu hiệu ở đây là gì? Số tất cả các giá trị của dấu hiệu?

b) Viết các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tìm tần số của chúng.

Giải

a) Dấu hiệu: Số con. Có tất cả 20 giá trị.

b) Các giá trị khác nhau của dấu hiệu: 0, 1, 2, 3. Tần số tương ứng của các giá trị là: 4; 6; 7; 3.

Bài 173. Kết quả điểm kiểm tra môn Toán học kì I của lớp 6A như sau:

9	10	7	10	7	8	9	5
8	4	6	8	10	4	7	6
7	8	7	9	9	5	10	10
10	9	4	10	8	9	10	8
7	7	5	10	6	4	8	6
3	9	8	9	10	9	9	7

Chọn câu trả lời đúng:

Số học sinh lớp 6A không dưới điểm trung bình là:

A. 34 học sinh B. 43học sinh

C. 28 học sinh D. 32 học sinh

Giải

Chọn B.

Bài 174. Chọn 36 hộp chè một cách tùy ý trong khi của một cửa hàng và đem cân, kết quả được ghi lại trong bảng (sau khi đã trừ khối lượng của vỏ).

Khối lượng hộp chè (tính bằng gam)		
98	100	100
98	102	98
98	100	101
100	100	98
99	101	100
100	100	99
99	99	102
100	101	101
100	100	100
102	100	100
100	100	99
100	99	100

Hãy cho biết:

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu và số các giá trị của dấu hiệu đó.

b) Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu.

c) Các giá trị khác nhau và tần số của chúng.

Giải

Dấu hiệu: Khối lượng của mỗi hộp chè.

a) Số tất cả các giá trị của dấu hiệu là 36.

b) Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu là 5.

c) Các giá trị khác nhau của dấu hiệu là 98; 99; 100; 101; 102.

Tần số tương ứng của các giá trị theo thứ tự trên là 5; 6; 18; 4; 3.

Bài 175. Tuổi nghề của 30 công nhân trong một toán thợ được biết như sau:

a	b	1	5	7	2	8	6	3	7
4	6	7	3	5	2	1	4	9	8
3	6	7	8	9	3	2	5	6	4

Hãy nêu các giá trị khác nhau của dấu hiệu, tìm tần số của từng giá trị đó, cho biết a, b là các số nguyên tố và a = b + 3

Giải

a = b + 3, a và b là hai số nguyên tố.

Nếu b là số lẻ, ta có a là số chẵn lớn hơn 2 nên a là số nguyên tố là vô lí.

Vậy b là số chẵn mà b là số nguyên tố nên b = 2.

Ta có a = 2 + 3 = 5 là số nguyên tố.

Ta có bảng hoàn chỉnh sau

5	2	1	5	7	2	8	6	3	7
4	6	7	3	5	2	1	4	9	8
3	6	7	8	9	3	2	5	6	4

Các giá trị khác nhau của dấu hiệu là:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Tần số tương ứng là:

2, 4, 4, 3, 4, 4, 4, 3, 2.

§2. BẢNG TẦN SỐ CÁC GIÁ TRỊ CỦA DẤU HIỆU

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Lập bảng tần số

Vẽ một khung hình chữ nhật gồm hai dòng. Ở dòng trên, ghi lại các giá trị khác nhau của dấu hiệu theo thứ tự tăng dần.

Ở dòng dưới, ghi các số tương ứng dưới mỗi giá trị đó.

Bảng được lập như trên gọi là bảng phân phối thực nghiệm của dấu hiệu, để tiện gọi là bảng tần số.

2. *Chú ý*:

Có thể chuyển bảng tần số dạng ngang thành bảng dọc.

- Từ bảng số liệu thống kê ban đầu có thể lập bảng tần số (bảng phân phối thực nghiệm của dấu hiệu).
- Bảng tần số giúp người điều tra dễ dàng có những nhận xét chung về sự phân phối các giá trị của dấu hiệu và tiện lợi cho việc tính toán sau này.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 176. Các học sinh lớp 7A khi làm kiểm tra môn toán có các điểm sau:

7	5	9	10	5	6	5	6	10	6
10	7	10	5	3	7	4	9	7	9
9	4	10	7	10	6	6	10	6	9

a) Dấu hiệu ở sau đây là gì?

b) Lập bảng tần số và nhận xét.

Giải

a) Dấu hiệu: Số điểm của bài kiểm tra toán của từng học sinh lớp 7A.

b) Bảng tần số.

Điểm kiểm tra (toán)	Tần số (n)
3	1
4	2
5	4
6	6
7	5
9	5
10	7

Nhận xét: Điểm kiểm tra cao nhất là 10.

Điểm kiểm tra thấp nhất là 3.

Bài 177. Tuổi nghề (tính theo năm) của một số công nhân trong một phân xưởng được ghi lại ở bảng sau.

8	10	5	9	7
3	10	4	5	6
4	4	7	2	4
4	2	8	2	7
7	1	5	4	1

a) Dấu hiệu ở đây là gì? Các giá trị là bao nhiêu?

b) Lập bảng tần số và rút ra một số nhận xét.

Giải

a) Dấu hiệu: tuổi nghề của một công nhân.

Số các giá trị là: 25

Tuổi nghề của một công nhân (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số (n)	2	3	1	6	3	1	4	2	1	2	N = 25

Nhận xét:

Số giá trị của dấu hiệu là 25, số các giá trị khác nhau là 10.

Giá trị lớn nhất là 10, giá trị nhỏ nhất là 1, giá trị có tần số lớn nhất là 4.

Bài 178. Thời gian giải một bài toán (tính theo phút) của 35 học sinh được ghi trong bảng sau:

5	6	4	10	8	10	5
7	10	7	8	9	5	8
8	8	4	6	8	8	9
7	6	10	5	7	8	10
8	6	8	5	7	9	10

a) Dấu hiệu ở đây là gì? Số các giá trị là bao nhiêu?

b) Lập bảng tần số và rút ra một nhận xét.

Giải

a) Dấu hiệu: Thời gian giải một bài toán (tính theo phút) mỗi học sinh. Số giá trị là 35.

b) Bảng tần số:

Thời gian (x)	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số (n)	2	5	4	5	10	3	6	N = 35

Nhận xét:

– Thời gian giải một bài toán ngắn nhất là 4 phút.

– Thời gian giải một bài toán dài nhất là10 phút

– Số bạn giải toán từ 7 đến 10 phút chiếm tỉ lệ cao.

Bài 179. Một xạ thủ bắn súng. Số điểm đạt sau mỗi lần bắn được ghi lại ở bảng sau:

9	10	8	10	9	10	7	7	9	8
10	9	10	9	9	9	8	8	8	8
8	9	10	10	10	9	9	9	8	9

a) Dấu hiệu ở đây là gì? Xạ thủ đã bắn bao nhiêu phát?

b) Lập bảng tần số và rút ra một số nhận xét.

Giải

a) *Dấu hiệu:* Số điểm đạt được của mỗi lần bắn. Xạ thủ đã bắn 30 phát.

b) Bảng tần số:

Số điểm (x)	7	8	9	10	
Tần số (n)	2	8	12	8	N = 30

– Số điểm cao nhất là 10.

– Số điểm thấp nhất là 7.

– Số điểm chiếm tỉ lệ cao là 9.

Bài 180. Cho bảng tần số

Số điểm (x)	2	4	5	7	
Tần số (n)	3	6	5	6	N = 20

Từ bảng trên hãy viết lại một bảng số liệu ban đầu.

Giải

Có thể viết một bảng số liệu ban đầu như sau:

2	4	5	7	7
4	5	7	7	4
5	7	4	2	5
4	2	5	4	7

Bài 181. Cho bảng tần số.

Số điểm (x)	36	37	38	39	40	
Tần số (n)	7	8	10	6	9	N = 40

Hãy chuyển bảng tần số dạng ngang ở trên thành bảng dọc.

Giải

Số điểm (x)	Tần số (n)
36	7
37	8
38	10
39	6
40	9
	N = 40

Bài 182. Cho bảng tần số

Số điểm (x)	Tần số (n)
3	3
4	5
5	7
7	10
	N = 25

Hãy chuyển bảng tần số dạng dọc ở trên thành bảng ngang.

Giải

Số điểm (x)	3	4	5	7	
Tần số (n)	3	5	7	10	N = 25

§3. BIỂU ĐỒ

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Ngoài bảng số liệu thống kê ban đầu, bảng tần số, người ta còn dùng biểu đồ để cho một hình ảnh cụ thể về giá trị của dấu hiệu và tần số.

Có nhiều loại biểu đồ.

1. Biểu đồ đoạn thẳng: Dựng hệ trục tọa độ, trục hoành biểu diễn các giá trị x, trục tung biểu diễn tần số N.

2. Biểu diễn hình chữ nhật.

3. Biểu đồ hình quạt: Ở góc tâm hình quạt biểu diễn tần số.

Cách dựng biểu đồ đoạn thẳng:

a) Dựng hệ trục tọa độ, trục hoành biểu diễn các giá trị x, trục tung biểu diễn tần số n (độ dài đơn vị trên hai trục có thể cắt nhau).

b) Xác định các điểm có tọa độ là cặp số gồm giá trị và tần số của nó.

(*Lưu ý:* Giá trị viết trước, tần số viết sau).

c) Nối mỗi điểm đó với điểm trên trục hoành có cùng hoành độ.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 183. Số học sinh nữ của từng lớp trong một trường THCS được ghi lại trong bảng sau:

18	19	20	20	18
19	20	18	19	19
20	21	20	20	20
21	18	21	18	19

a) Lập bảng tần số.

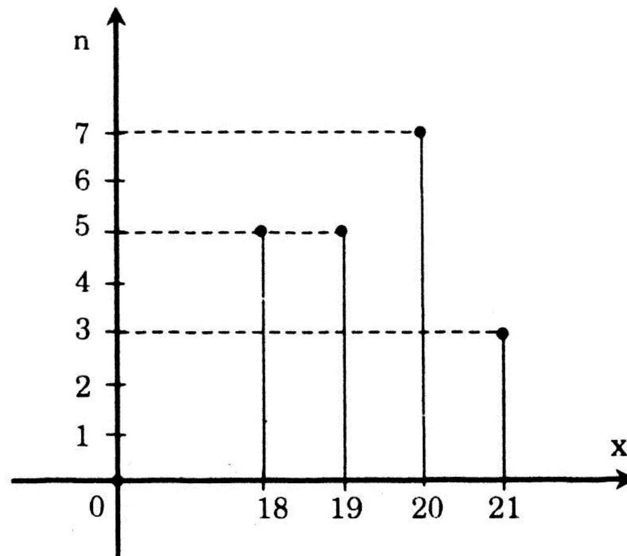
b) Vẽ biểu đồ đoạn thẳng.

Giải

Bảng tần số

Số học sinh nữ	18	19	20	21	
Tần số (n)	5	5	7	3	N = 20

Vẽ biểu đồ



Bài 184. Kết quả điều tra về số con của 30 hộ thuộc một xã được cho trong bảng sau:

0	1	2	1	1	1
3	0	3	1	0	3
1	2	0	0	2	1
2	1	1	2	1	2
1	0	0	0	0	1

a) Lập bảng tần số

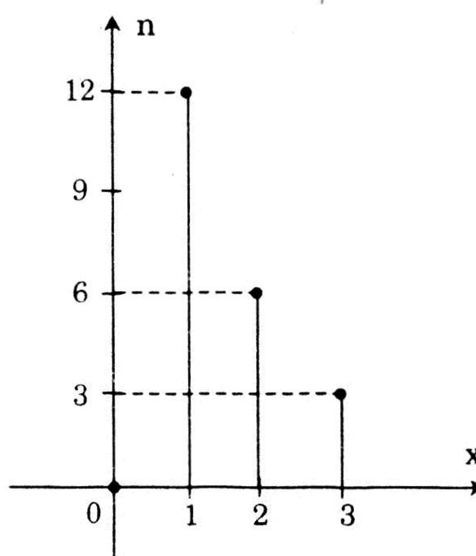
b) Vẽ biểu đồ đoạn thẳng.

Giải

Bảng tần số

Số con (x)	0	1	2	3	
Tần số (n)	9	12	6	3	N = 30

b) Vẽ biểu đồ đoạn thẳng.

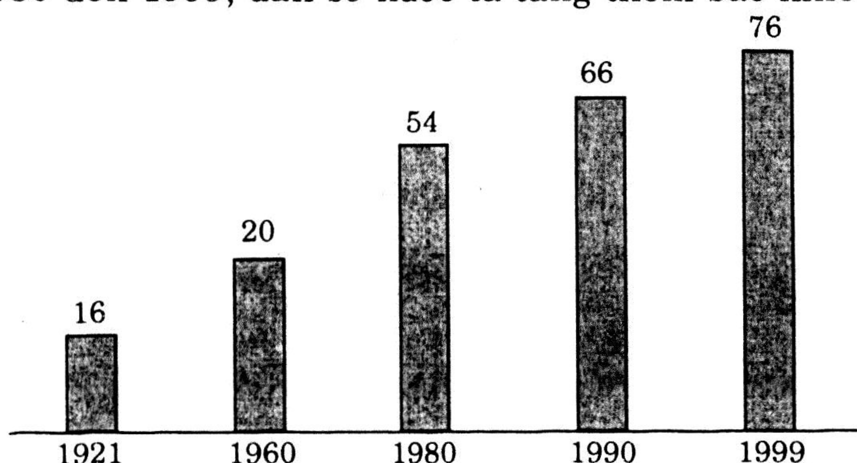


Bài 185. Hãy quan sát biểu đồ ở hình 3 (đơn vị của các cột là triệu người) và trả lời các câu hỏi:

a) Năm 1921, số dân của nước ta là bao nhiêu?

b) Sau bao nhiêu năm (kể từ năm 1921) thì dân số nước ta tăng thêm 60 triệu người?

c) Từ 1980 đến 1999, dân số nước ta tăng thêm bao nhiêu?



Giải

a) Năm 1921, số dân của nước ta là 16 triệu.

b) Năm 1999 dân số nước ta là 76 triệu.

$16 + 60 = 76$, $\quad 1999 - 1921 = 78$

Sau 78 năm dân số của nước ta tăng thêm 60 triệu.

c) Từ năm 1980 đến năm 1999 dân số nước ta tăng thêm:

$76 - 54 = 22$ triệu.

§4. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Số trung bình cộng của một số (kí hiệu $\overline{X}$) được tính từ bảng tần số theo cách sau:

- Nhân từng giá trị với tầng số tương ứng.
- Cộng tất cả các tích vừa tìm được.
- Chia tổng đó cho số các giá trị (tức tổng của tần số).

Số trung bình cộng thường được dùng làm đại diện cho dấu hiệu, đặc biệt là khi muốn so sánh các dấu hiệu cùng loại.

Chú ý:

Khi các giá trị của dấu hiệu có khoảng chênh lệch rất lớn đối với nhau thì không nên lấy số trung bình cộng làm đại diện cho các giá trị của dấu hiệu đó.

Mốt là giá trị có tần số lớn nhất trong bảng tần số.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 186. Một đơn vị có 40 công nhân. Tuổi nghề của các công nhân (tính bằng năm) như sau:

10	10	10	9	9	8	8	9	10	9
10	9	10	8	10	8	9	8	10	9
10	8	10	9	10	10	10	9	8	10
10	10	10	10	10	10	10	9	8	10

Tính số trung bình cộng của dấu hiệu.

Giải

Số tuổi nghề (x)	Tần số (n)	Các tích (x.n)	
8	8	64	
9	10	90	
10	22	220	
	N = 40	Tổng: 374	$\overline{X} = \dfrac{374}{40} = 9{,}35$

Bài 187. Điều tra về số con của mỗi gia đình trong một khu phố, có bảng số liệu sau:

2	1	2	3	0
2	2	1	0	2
1	2	2	2	1
2	0	2	0	0
2	1	3	2	1

a) Tính số trung bình cộng.

b) Tìm mốt

Giải

a)

Số con (x)	Tần số (n)	Các tích (x.n)	
0	5	0	
1	6	6	
2	12	24	
3	2	6	
	N = 25	36	$\overline{X} = \frac{36}{25} = 1,44$

b) $M_0 = 2$

Bài 188. Đo chiều cao của 100 học sinh lớp 5 (đơn vị đo: cm) và được kết quả theo bảng sau:

Chiều cao (sắp xếp theo khoảng)	Tần số n
105	1
110 – 120	8
121 – 131	30
132 – 142	45
143 – 153	16
	n = 100

Bảng này có gì khác so với những bảng tần số đã biết.

Ước tính số trung bình cộng trong trường hợp này.

Giải

Chúng ta tính số trung bình cộng của từng khoảng.

Khoảng 110 – 200 có số trung bình cộng là

(110 + 120) : 2 = 115

Khoảng 121 – 131 có số trung bình cộng là:

(121 + 131) : 2 = 126

Khoảng 132 – 142 có số trung bình cộng là:

(132 + 142) : 2 = 137

Khoảng 143 – 153 có số trung bình cộng là:

(143 + 153) : 2 = 148

Ta có bảng tần số có bổ sung hai cột như sau:

Chiều cao (x)	Tần số (n)	Các tích (x.n)	
105	1	105	
115	8	920	
126	30	3780	
137	45	6165	
148	16	2368	
	N = 100	Tổng: 13338	$\overline{X} = \frac{13338}{100} = 133,38$

Bài 189. Chứng minh rằng: Nếu cộng hay trừ giá trị của dấu hiệu với một hằng số thì số trung bình cộng của dấu hiệu cũng được cộng hay trừ với hằng số đó.

Giải

Nếu gọi các giá trị của dấu hiệu lần lượt là $x_1; x_2; ...; x_n$ và tần số tương ứng là $m_1, m_2; ...; m_n$

Ta có $\overline{X} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + ... + x_nm_n}{N}$

Trong đó: $m_1 + m_2 + ... + m_n = N$

Gọi a là giá trị của số cộng với giá trị của dấu hiệu.

Cần chứng minh $\frac{(x_1 + a)m_1 + (x_2 + a)m_2 + ... + (x_n + a)m_n}{N} = \overline{X} + a$

Thật vậy: $\overline{X} + a = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + ... + x_nm_n}{N} + a$

$$= \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + ... + x_nm_n + am_1 + am_2 + am_3 + ... + am_n}{N}$$

$$= \frac{(x_1 + a)m_1 + (x_2 + a)m_2 + ... + (x_n + a)m_n}{N}$$

Tương tự cho trường hợp trừ.

Bài 190. Chứng minh rằng: Nếu nhân các giá trị của dấu hiệu với một hằng số thì số trung bình của dấu hiệu cũng được nhân lên với hằng số đó.

Giải

Nếu gọi các giá trị của dấu hiệu lần lượt là $x_1, x_2, ..., x_n$ và tần số tương ứng là $m_1, m_2, ..., m_n$

Ta có $\overline{X} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + ... + x_nm_n}{N}$

Trong đó $m_1 + m_2 + ... + m_n = N$

Gọi a là giá trị của số nhân với giá trị của dấu hiệu.

Cần chứng minh:

$$\frac{(x_1.a)m_1 + (x_2.a)m_2 + ... + (x_n.a)m_n}{N} = \overline{X}.a$$

Thật vậy:

$$\overline{X}.a = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + ... + x_nm_n}{N}.a$$

$$= \frac{x_1.m_1a + x_2.m_2a + ... + x_n.m_na}{N}$$

$$= \frac{(x_1.a)m_1 + (x_2.a)m_2 + ... + (x_n.a)m_n}{N}$$

ÔN TẬP CHƯƠNG III

Bài 191. Theo dõi thời gian làm một bài toán của 50 học sinh thầy giáo lập được bảng sau:

Thời gian (x)	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Tần số (n)	1	3	4	7	8	9	8	5	3	2	N = 50

a) Tính số trung bình cộng

b) Tìm mốt của dấu hiệu

Hướng dẫn

a) $\overline{X} = 7,68$

b) $M_0 = 8$

Bài 192. Điều tra về số con của mỗi gia đình trong một khu phố, có bảng số liệu sau:

2	0	1	2	1	2	2	2	2	2
2	1	1	2	0	1	3	2	2	3
1	1	2	0	2	2	2	0	1	0
2	2	2	0	2	1	1	2	0	2

a) Tìm số trung bình cộng

b) Tìm mốt của dấu hiệu

Hướng dẫn

a) $\overline{X} = 1,45$

b) $M_0 = 2$

Bài 193. Hai tổ một và hai của lớp 7A mỗi tổ có 12 học sinh, kết quả điểm của bài kiểm tra toán được ghi lại dưới đây.

Tổ một	10	8	3	5	5	6	7	10	3	7	7	10
Tổ hai	7	6	7	6	8	7	7	7	8	8	6	7

a) Tính điểm trung bình cộng của từng tổ.

b) Cho nhận xét về kết quả điểm kiểm tra toán của hai tổ trên.

Hướng dẫn

a) Tổ một: $\overline{X} = \frac{81}{12} = 6{,}75$

Tổ hai: $\overline{X} = \frac{84}{12} = 7$

b) Điểm trung bình cộng của tổ hai hơn trung bình cộng của tổ một.

Bài 194. Một đơn vị có 40 công nhân. Tuổi nghề của các công nhân (tính bằng năm) như sau:

8	10	10	9	9	10	8	9	10	10
9	9	10	8	10	8	9	8	8	10
10	8	12	9	12	10	10	9	8	12
10	10	10	10	10	12	10	9	8	10

a) Dấu hiệu là gì?

b) Lập bảng tần số, nhận xét.

c) Biểu diễn bằng biểu đồ đoạn thẳng.

b) Tìm số trung bình cộng, tìm mốt.

Hướng dẫn

a) $\overline{X} = 9{,}525$

Bài 195. Quan sát bảng tần số sau và cho biết nên dùng số trung bình cộng làm đại diện cho dấu hiệu không? Vì sao?

Giá trị (x)	1	2	4	99	100	
Tần số (n)	2	5	10	2	1	N = 20

Hướng dẫn

Không nên dùng số trung bình cộng làm đại diện cho dấu hiệu vì các giá trị có khoảng chênh lệch quá lớn.

Chương IV: BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

§1. KHÁI NIỆM VỀ BIỂU THỨC ĐẠI SỐ. GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Khái niệm về biểu thức đại số:

Trong toán học, vật lí... thường gặp những biểu thức bao gồm những phép toán (cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa) không chỉ thực hiện những số mà có thể còn trên những chữ. Những biểu thức như vậy gọi là biểu thức đại số.

Một biểu thức đại số có thể chứa một hay nhiều chữ. Trong những chữ này, có chữ là biến số, có chữ là hằng số.

Các chữ số biểu thị cho một số xác định thì được gọi là hằng số (gọi là hằng).

Các chữ số có thể nhận những giá trị bằng số tùy ý của một tập hợp số nào gọi là biến số (gọi tắt là biến).

2. Giá trị của một biểu thức đại số:

Giá trị của một biểu thức đại số là kết quả tìm được sau khi thay các biến bởi giá trị cho trước.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 196. Hãy viết các biểu thức đại số để biểu thị các ý sau:

a) Tích của tổng hai số a và b với hiệu của chúng.

b) Bình phương của tổng ba số a, b và c.

c) Tổng của ba lần bình phương số x và số y.

Giải

a) $(a + b)(a - b)$ b) $(a + b + c)^2$ c) $3x^2 + y$

Bài 197. Nối các ý 1), 2), ..., 5) với a), b), ..., e) (chẳng hạn như nối 1 với e) sao cho chúng có cùng ý nghĩa.

1.	$7 - x$	a)	Tích của x và y
2.	19z	b)	Tích của 19 và z
3.	xy	c)	Tổng của 156 và x
4.	$156 + x$	d)	Tích của tổng x và y với hiệu của x và y
5.	$(x + y)(x - y)$	e)	Hiệu của 7 và x

Giải

1.	$7 - x$	a)	Tích của x và y
2.	19z	b)	Tích của 19 và z
3.	xy	c)	Tổng của 156 và x
4.	$156 + x$	d)	Tích của tổng x và y với hiệu của x và y
5.	$(x + y)(x - y)$	e)	Hiệu của 7 và x

Bài 198. Tính giá trị của biểu thức $-4m + 3n$ tại $m = -2$; $n = -1$

Giải

Giá trị của biểu thức $-4m + 3n$ tại $m = -2$; $n = -1$ là

$-4(-2) + 3(-1) = 8 - 3 = 5$

Bài 199. Tính giá trị của biểu thức:

$2x^{28}y^3 - 16x^3y^4$ tại $x = 1$; $y = -1$

Giải

Giá trị của biểu thức $2x^{28}y^3 - 16x^3y^4$ tại $x = 1$; $y = -1$ là

$2.1^{28}.(-1)^3 - 16.1^3.(-1)^4 = 2.1.(-1) - 16.1.1 = -2 - 16 = -18$

Bài 200. Tính giá trị của biểu thức:

$x^4 - 2007x^3 + 2007x^2 - 2007x + 2007$ tại $x = 2006$

Giải

$x = 2006$ nên $2007 = x + 1$

Ta có $x^4 - 2007x^3 + 2007x^2 - 2007x + 2007 =$

$= x^4 - (x + 1)x^3 + (x + 1)x^2 - (x + 1)x + x + 1$

$= x^4 - x^4 - x^3 + x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 1 = 1$

Vậy giá trị của biểu thức

$x^4 - 2007x^3 + 2007x^2 - 2007x + 2007$ tại $x = 2006$ là 1.

Bài 201. Tính giá trị của biểu thức:

$4x^3 + 2y^2 - 5$ tại x, y thỏa mãn

$(x - 1)^{46} + (y + 2)^{28} = 0$

Giải

Ta có: $(x - 1)^{46} + (y + 2)^{28} = 0$

Nên $x - 1 = 0$ và $y + 2 = 0$

hay $x = 1$ và $y = -2$

Giá trị của biểu thức $4x^3 + 2y^2 - 5$

tại $x = 1, y = -2$ là $4.1^3 + 2.(-2)^2 - 5$

$= 4.1 + 2.4 - 5 = 4 + 8 - 5 = 7$

§2. ĐƠN THỨC

A/ KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đơn thức:

Đơn thức là một biểu thức đại số chỉ gồm một số, hoặc một biến, hoặc một tích giữa các số và các biến.

2. Đơn thức thu gọn:

Đơn thức thu gọn là đơn thức chỉ gồm tích của một số với các biến mà mỗi biến đã được nâng lên lũy thừa với một số mũ nguyên dương.

3. Bậc của một đơn thức:

Bậc của đơn thức có hệ số khác 0 là tổng số mũ của tất cả các biến có trong đơn thức đó. Số thực khác 0 là đơn thức bậc không

Số 0 được coi là đơn thức không có bậc.

4. Nhân hai đơn thức:

Muốn nhân hai đơn thức, ta nhân các hệ số với nhau và nhân các phần biến với nhau, rồi thu gọn đơn thức mới nhận được.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 201. Thu gọn và chỉ ra phần hệ số, phần biến của các đơn thức sau:

a) $\frac{5}{7}x^4y.(-7x^2y^3)$

b) $-\frac{1}{10}ax^{12}y^8x^4y^2b$ (a, b là hằng số)

Giải

a) $\frac{5}{7}x^4y.(-7x^2y^3) = \left[\frac{5}{7}.(-7)\right](x^4.x^2)(y.y^3) = -5x^6y^4$

Phần hệ số là –5, phần biến số là x^6y^4

b) $-\frac{1}{10}ax^{12}y^8x^4y^2b = \left(-\frac{1}{10}ab\right)(x^{12}x^4)(y^8y^2) = -\frac{1}{10}abx^{16}y^{10}$.

Phần hệ số là $-\frac{1}{10}ab$, phần biến số là $x^{16}y^{10}$.

Bài 203. Tìm tích của các đơn thức sau rồi tìm bậc của đơn thức vừa tìm được đó.

$\frac{4}{7}x^5y^6$ và $\frac{-21}{44}x^4y^9$

Giải

$\left(\frac{4}{7}x^5y^6\right).\left(\frac{-21}{44}x^4y^9\right) = \left(\frac{4}{7}.\frac{-21}{44}\right)(x^5x^4)(y^6y^9) = \frac{-3}{11}x^9y^{15}$

Bậc của đơn thức là 9 + 15 = 24

Bài 204. Tìm m, n ∈ N* biết: $(-25x^9y^n)(-4x^my^8) = 100x^{24}y^{107}$

Giải

$(-25x^9y^n)(-4x^my^8) = [(-25)(-4)](x^9.x^m)(y^n.y^8)$

$= 100x^{m+9}y^{n+8}$

Do đó $100x^{m+9}y^{n+8} = 100x^{24}y^{107}$

Nên m + 9 = 24 và n + 8 = 107

m = 15 và n = 99

Bài 205. Cho đơn thức $(7 - 2a)x^8y^6$, a là hằng số.

Tìm a để đơn thức luôn luôn không âm với mọi x, y.

Giải

Ta có $x^8y^6 \geq 0$ với mọi x, y.

Do vậy để đơn thức $(7 - 2a)x^8y^6$ luôn luôn không âm với mọi x, y thì cần có $7 - 2a \geq 0$

$$\Leftrightarrow -2a \geq -7 \Leftrightarrow a \leq \frac{7}{2}$$

Bài 206. Hai đơn thức $4x^3y^7$ và $-2xy^5$ có thể cùng có giá trị dương được không?

Giải

Ta có $(4x^3y^7)(-2xy^5) = [4.(-2)](x^3.x)(y^7.y^5)$

$= -8x^4y^{12} \leq 0$, với mọi x, y. Do đó hai đơn thức đã cho không thể cùng có giá trị dương.

Bài 207. Chứng tỏ rằng ba đơn thức: $\frac{-2}{7}x^3y^4$; $-\frac{7}{5}x^5y$ và $3y^5$ không thể cùng có giá trị âm.

Giải

Ta có $\left(\frac{-2}{7}x^3y^4\right)\left(-\frac{7}{5}x^5y\right)\left(3y^5\right)$

$$= \left(\frac{-2}{7}.\frac{-7}{5}.3\right)(x^3.x^5)(y^4.y.y^5) = \frac{6}{5}x^8y^{10} \geq 0 \text{ với mọi x, y.}$$

Do đó ba đơn thức đã cho không thể cùng có giá trị âm.

§3. ĐƠN THỨC ĐỒNG DẠNG

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Đơn thức đồng dạng

Hai đơn thức đồng dạng là hai đơn thức sau khi thu gọn, có phần biến giống nhau.

Chú ý: Mọi số thực đều là các đơn thức đồng dạng với nhau.

2. Tổng và hiệu các đơn thức đồng dạng.

Để cộng (hay trừ) các đơn thức đồng dạng ta cộng (hay trừ) các hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 208. Xếp các đơn thức sau thành từng nhóm các đơn thức đồng dạng.

$$\frac{5}{4}x^3y^4;\ \frac{-5}{7}x^4y^3;\ \frac{1}{5}x^4y^4;\ -2x^3y^4;\ -0{,}5x^4y^4;\ 2x^4y^3;\ 0{,}3x^3y^4;\ -9x^4y^3$$

Giải

Xếp các đơn thức đã cho thành từng nhóm các đơn thức đồng dạng như sau:

Nhóm 1: $\frac{5}{4}x^3y^4;\ -2x^3y^4;\ 0{,}3x^3y^4;$

Nhóm 2: $2x^4y^3;\ \frac{-5}{7}x^4y^3;\ -9x^4y^3$

Nhóm 3: $-0{,}5x^4y^4;\ \frac{1}{5}x^4y^4;$

Bài 209. Tính:

a) $5x^4y - 2x^4y + 7x^4y;$ b) $-\frac{2}{5}xy^2z - \frac{1}{5}xy^2z + xy^2z$

Giải

a) $5x^4y - 2x^4y + 7x^4y = (5 - 2 + 7)x^4y = 10x^4y$

b) $-\frac{2}{5}xy^2z - \frac{1}{5}xy^2z + xy^2z$

$= \left(-\frac{2}{5} - \frac{1}{5} + 1\right)xy^2z = \frac{2}{5}xy^2z$

Bài 210. Viết các đơn thức sau dưới dạng tổng hoặc hiệu của hai đơn thức trong đó có một đơn thức bằng $5x^3y^2$;

a) $11x^3y^2$ b) $-3x^3y^2$

Giải

a) $11x^3y^2 = 5x^3y^2 + 6x^3y^2$; $11x^3y^2 = 16x^3y^2 - 5x^3y^2$

b) $-3x^3y^2 = 5x^3y^2 + (-8x^3y^2)$; $-3x^3y^2 = 5x^3y^2 - 8x^3y^2$

Bài 211. Xác định số m để tổng các đơn thức x^2y^4; mx^2y^4; $-5x^2y^4$ bằng $3x^2y^4$

Giải

Ta có $x^2y^4 + mx^2y^4 + (-5x^2y^4)$

$= (1 + m - 5)x^2y^4 = (m - 4)x^2y^4$

Do đó $m - 4 = 3 \Leftrightarrow m = 3 + 4 \Leftrightarrow m = 7$

Bài 212. Xác định số m để hiệu của hai đơn thức sau luôn có giá trị không dương với mọi giá trị của biến khác 0; mx^4y^6, $2006x^4y^6$.

Giải

$$mx^4y^6 - 2006x^4y^6 = (m - 2006)x^4y^6$$

Vì $x^4y^6 > 0$ với mọi giá trị của x, y khác 0.

Do đó để hiệu $mx^4y^6 - 2006x^4y^6$ luôn có giá trị không dương với mọi giá trị của biến thì $m - 2006 \le 0 \Leftrightarrow m \le 2006$.

§4. ĐA THỨC. CỘNG, TRỪ ĐA THỨC

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Đa thức

Đa thức là một tổng của các đơn thức. Mỗi đơn thức trong tổng gọi là một hạng tử của đơn thức đó.

2. Thu gọn đa thức

Một đa thức viết dưới dạng thu gọn là một tổng đại số các đơn thức không đồng dạng với nhau.

3. Bậc của đa thức

Bậc của đa thức là bậc của hạng tử có bậc cao nhất trong dạng thu gọn của đa thức đó.

Số 0 là đa thức không và không có bậc.

4. Cộng hai đa thức

Muốn cộng hai đa thức ta có thể lần lượt thực hiện các bước:

Bước 1: Viết liên tiếp các hạng tử của hai đa thức đó cùng với dấu của chúng.

Bước 2: Thu gọn đa thức.

5. Trừ hai đa thức:

Muốn trừ hai đa thức ta có thể lần lượt thực hiện các bước:

Bước 1: Viết các hạng tử của đa thức thứ nhất cùng với dấu của chúng.

Bước 2: Viết tiếp các hạng tử của đa thức thứ hai với dấu ngược lại.

Bước 3: Thu gọn đa thức.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 213. Tìm bậc của mỗi đa thức sau:

a) $5x^2 - 3x + 5 + 2x - \frac{1}{2}x^2$ b) $3x^3 + 5 - 3x^3 - x + x$

Giải

a) $5x^2 - 3x + 5 + 2x - \frac{1}{2}x^2$

b) $3x^3 + 5 - 3x^3 - x + x$

$= 5x^2 - \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2x + 5$

$= \frac{9}{2}x^2 - x + 5$. Đa thức có bậc 2.

$= 3x^3 - 3x^3 - x + x + 5 = 5$

Đa thức có bậc 0.

Bài 214. Thu gọn các đa thức và tìm bậc của đa thức:

a) $4x^5y^2 - 9x^2y^4 + 3x^5y^2 + 5x^2y^4 - 6x^6$

b) $5x^8y^2 - x^2y + 3x^2y - 5x^8y^2 + 6x^2y$

Giải

a) $4x^5y^2 - 9x^2y^4 + 3x^5y^2 + 5x^2y^4 - 6x^6$

$= 4x^5y^2 + 3x^5y^2 - 9x^2y^4 + 5x^2y^4 - 6x^6$

$= 7x^5y^2 - 4x^2y^4 - 6x^6$

Bậc của đa thức là 7.

b) $5x^8y^2 - x^2y + 3x^2y - 5x^8y^2 + 6x^2y$

$= 5x^8y^2 - 5x^8y^2 - x^2y + 3x^2y + 6x^2y$

$= 8x^2y$

Bậc của đa thức là 3.

Bài 215. Cho hai đa thức:

$A = xyz - 3x^2 + 5xy - 4$

$B = 5x^2 + xyz - 5xy - y^2 + 30$

Tính $A + B$; $A - B$

Giải

$A + B = xyz - 3x^2 + 5xy - 4 + 5x^2 + xyz - 5xy - y^2 + 30$

$= (xyz + xyz) + (-3x^2 + 5x^2) + (5xy - 5xy) - y^2 + (-4 + 30)$

$= 2xyz + 2x^2 - y^2 + 26$

$A - B = xyz - 3x^2 + 5xy - 4 - (5x^2 + xyz - 5xy - y^2 + 30)$

$= (xyz - xyz) + (-3x^2 - 5x^2) + (5xy + 5xy) + y^2 + (-4 - 30)$

$= -8x^2 + 10xy + y^2 - 34$

Bài 216. Tìm đa thức A và đa thức B biết:

a) $A + (x^3 - 2y^2) = x^3 - y^2 + 3y^2 - 1$

b) $B - (5x^2 - xyz) = xy + 2x^2 - 6xyz + 8$

Giải

a) $A + (x^3 - 2y^2) = x^3 - y^2 + 3y^2 - 1$

$A = x^3 - y^2 + 3y^2 - 1 - (x^3 - 2y^2)$

$A = x^3 - y^2 + 3y^2 - 1 - x^3 + 2y^2$

$A = (x^3 - x^3) + (-y^2 + 3y^2 + 2y^2) - 1$

$A = 4y^2 - 1$

b) $B - (5x^2 - xyz) = xy + 2x^2 - 6xyz + 8$

$B = xy + 2x^2 - 6xyz + 8 + (5x^2 - xyz)$

$B = xy + 2x^2 - 6xyz + 8 + 5x^2 - xyz$

$B = xy + (2x^2 + 5x^2) + (-6xyz - xyz) + 8$

$B = xy + 7x^2 - 7xyz + 8$

Bài 217. Tìm đa thức M sao cho tổng của M và đa thức $x^4 - 3x^2y + 5xy - 8$ không chứa biến x.

Giải

Có vô số đa thức như vậy, chẳng hạn:

$M = -x^4 + 3x^2y - 5xy + 1$

Ta có $M + x^4 - 3x^2y + 5xy - 8$

$= -x^4 + 3x^2y - 5xy + 1 + x^4 - 3x^2y + 5xy - 8$

$= -7$

Bài 218. Tìm đa thức A sao cho tổng của A và đa thức $x^5 - 3x^4y + 2xy^2 - xy + 5$ là một đa thức bậc 3.

Giải

Có vô số đa thức như vậy, chẳng hạn.

$A = -x^5 + 3x^4y$

Ta có: $A + x^5 - 3x^4y + 2xy^2 - xy + 5$

$= -x^5 + 3x^4y + x^5 - 3x^4y + 2xy^2 - xy + 5$

$= 2xy^2 - xy + 5$

Bậc của đa thức là 3.

Bài 219. Tính giá trị của đa thức:

$15x^4y - 2x^3y^2 + 5x^4y + 2x^3y^2 - x^2y - 20x^4y$ tại $x = -3; y = 5$

Giải

$15x^4y - 2x^3y^2 + 5x^4y + 2x^3y^2 - x^2y - 20x^4y$

$= 15x^4y + 5x^4y - 20x^4y - 2x^3y^2 + 2x^3y^2 - x^2y$

$= -x^2y$

Giá trị của đa thức đã cho tại $x = -3; y = 5$ là: $-(-3)^2.5 = -45$

Bài 220. Cho hai đa thức

$M = 6x^2 + 3xy - 2y^2; N = 3y^2 - 2x^2 - 3xy$

Chứng minh rằng không tồn tại giá trị nào của x và y để hai đa thức M và N cùng có giá trị âm.

Giải

Ta có $M + N = 6x^2 + 3xy - 2y^2 + 3y^2 - 2x^2 - 3xy$

$= 6x^2 - 2x^2 + 3xy - 3xy - 2y^2 + 3y^2 = 4x^2 + y^2$

Vì $4x^2 + y^2 \geq 0$ với mọi x, y.

Vậy không tồn tại giá trị nào của x và y để hai đa thức M và N cùng có giá trị âm.

§5. ĐA THỨC MỘT BIẾN

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Đa thức một biến

- Đa thức một biến là tổng của những đơn thức của cùng một biến.
- Mỗi số được coi là một đơn thức một biến.
- Để chỉ rõ A là đa thức một biến x ta viết A(x)
- Bậc của đa thức một biến (khác đa thức không đã thu gọn) là số mũ lớn nhất trong đa thức đó.

2. Sắp xếp một đa thức

Để thuận lợi cho việc tính toán đối với đa thức một biến, người ta thường sắp xếp các hạng tử của chúng theo lũy thừa tăng hoặc giảm của biến.

– Để sắp xếp các hạng tử của đa thức, trước hết phải thu gọn đa thức đó.

– Ngoài biểu thức nhận xét trên, ta còn có thể gặp các biểu thức đại số, mà trong đó có những chữ đại diện cho các số xác định cho trước. Để phân biệt với biến, người ta gọi những chữ như vậy là hằng số (còn gọi tắt là hằng).

3. Hệ số

Hệ số của lũy thừa 0 của biến gọi là hệ số tự do, hệ số của lũy thừa cao nhất của biến là hệ số cao nhất.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 221. Cho đa thức:

$$P(x) = 9 + 7x^2 - 3x^3 + 2x^2 - 2x - x^3 + 6x^5$$

a) Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của P(x) theo lũy thừa giảm của biến.

b) Viết các hệ số khác 0 của đa thức (P(x).

Giải

a) Thu gọn

$$\begin{aligned} P(x) &= 9 + 7x^2 - 3x^3 + 2x^2 - 2x - x^3 + 6x^5 \\ &= 9 + (7x^2 + 2x^2) + (-3x^3 - x^3) - 2x + 6x^5 \\ &= 9 + 9x^2 - 4x^3 - 2x + 6x^5 \end{aligned}$$

Sắp xếp các hạng tử của đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến:

$P(x) = 6x^5 - 4x^3 + 9x^2 - 2x + 9$

b) Các hệ số khác 0 của đa thức: 6; –4; 9; –2; 9.

Bài 222. Cho đa thức $Q(x) = x^2 + 7x^4 + 8x^3 - 5x^6 + 8x^2 - 4x - 6$

a) Sắp xếp các hạng tử của Q(x) theo lũy thừa giảm của biến.

b) Chỉ ra hệ số khác 0 của Q(x).

Giải

a) $Q(x) = (x^2 + 8x^2) + 7x^4 + 8x^3 - 5x^6 - 4x - 6$

$= 9x^2 + 7x^4 + 8x^3 - 5x^6 - 4x - 6$

Sắp xếp các hạng tử của đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến:

$Q(x) = -5x^6 + 7x^4 + 8x^3 + 9x^2 - 4x - 6$

b) Các hệ số khác 0 của Q(x) là: –5, 7, 8, 9, –4, –6.

Bài 223. Xác định hệ số của đa thức

$P(x) = mx - 24$ biết rằng $P(-2) = 8$.

Giải

$P(-2) = 8$

$m(-2) - 24 = 8$

$-2m = 8 + 24$

$m = -16$

Bài 224. Cho $P(x) = 50x^{50} + 49x^{49} + ... + 2x^2 + x$. Tính P(0); P(1)

Giải

• $P(0) = 50.0^{50} + 49.0^{49} + ... + 2.0^2 + 0$

$= 0 + 0 + ... + 0$

$= 0$

• $P(1) = 50.1^{50} + 49.1^{49} + ... + 2.1^2 + 1$

$= 50 + 49 + ... + 2 + 1$

$= (50 + 1).50 : 2$

$= 1275$

Bài 225. Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$. Chứng tỏ rằng nếu $5a - b + 2c = 0$ thì $P(-2) . P(1) \le 0$

Giải

Ta có $P(-2) = 4a - 2b + c$, $P(1) = a + b + c$

Do đó $P(-2) + P(1) = 4a - 2b + c + a + b + c$

$= 5a - b + 2c = 0$

$\Rightarrow P(-2) = -P(1)$

Vì vậy $P(-2).P(1) = -P(1).P(1) = -[P(1)]^2 \le 0$

Bài 226. Tính tổng các hệ số của đa thức nhận được sau khi bỏ dấu ngoặc trong biểu thức $(7 + 2x - 8)^{2006}.(7 + 2x - 10)^{2007}$

Giải

Tổng các hệ số của đa thức bằng giá trị của đa thức tại $x = 1$, nên tổng hệ số của đa thức cần tìm là:

$(7 + 2.1 - 8)^{2006}.(7 + 2.1 - 10)^{2007} = 1^{2006}.(-1)^{2007}$

$= 1.(-1) = -1$

§6. CỘNG, TRỪ ĐA THỨC MỘT BIẾN

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Để cộng hoặc trừ hai đa thức một biến, ta có thể thực hiện theo hai cách sau:

Cách 1: Cộng trừ đa thức như cộng trừ đa thức đã học.

Cách 2: Sắp xếp các hạng tử của hai đa thức cùng theo lũy thừa giảm (hoặc tăng) của biến rồi đặt phép tính như cộng hoặc trừ các số (chú ý đặt các đơn thức đồng dạng ở cùng một cột).

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 227. Cho hai đa thức

$P(x) = -5x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 5,$

$Q(x) = 4x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 8$

Tính $P(x) + Q(x)$, $P(x) - Q(x)$

Giải

$$
\begin{array}{r}
P(x) = -5x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 5 \\
+ \\
Q(x) = 4x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 8 \\
\hline
P(x) + Q(x) = -x^4 - x^2 - 2x - 3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
P(x) = -5x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 5 \\
- \\
Q(x) = 4x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 8 \\
\hline
P(x) + Q(x) = -9x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 13
\end{array}
$$

Bài 228. Cho đa thức $P(x) = x^5 - 2x^4 - 7 + x$

Tìm các đa thức Q(x), R(x) sao cho

a) $P(x) + Q(x) = 16x^6 - 3x^4 + 5$ b) $P(x) - R(x) = x^4$

Giải

a) $P(x) + Q(x) = 16x^6 - 3x^4 + 5$

$(x^5 - 2x^4 - 7 + x) + Q(x) = 16x^6 - 3x^4 + 5$

$Q(x) = (16x^6 - 3x^4 + 5) - (x^5 - 2x^4 - 7 + x)$

$Q(x) = 16x^6 - 3x^4 + 5 - x^5 + 2x^4 + 7 - x$

$Q(x) = 16x^6 - x^5 - 3x^4 + 2x^4 - x + 5 + 7$

$Q(x) = 16x^6 - x^5 - x^4 - x + 12$

b) $P(x) - R(x) = x^4$

$(x^5 - 2x^4 - 7 + x) - R(x) = x^4$

$-R(x) = x^4 - (x^5 - 2x^4 - 7 + x)$

$-R(x) = x^4 - x^5 + 2x^4 + 7 - x$

$-R(x) = -x^5 + x^4 + 2x^4 - x + 7$

$-R(x) = -x^5 + 3x^4 - x + 7$

$R(x) = x^5 - 3x^4 + x - 7$

Bài 229. Cho đa thức $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x - 7$.

Viết hai đa thức này dưới dạng tổng hai đa thức của biến x.

Giải

Có nhiều cách viết, chẳng hạn:

$2x^3 - 5x^2 + x - 7 = (2x^3 - 8x^2) + (3x^2 + x - 7)$

Bài 230. Cho hai đa thức:

$P(x) = 5x^3 + 8x^2 - 7x - 1$

$Q(x) = -5x^3 - 2x^2 + 7x + 9$

Chứng minh rằng không tồn tại giá trị nào của x để hai đa thức P(x) và Q(x) cùng có giá trị không dương.

Giải

$P(x) + Q(x) = 5x^3 + 8x^2 - 7x - 1 - 5x^3 - 2x^2 + 7x + 9$

$P(x) + Q(x) = 6x^2 + 8$

$6x^2 + 8 > 0$ với mọi x.

Ta có $P(x) + Q(x) > 0$, do đó hai đa thức P(x), Q(x) không thể cùng không dương.

Vậy không có giá trị nào của x để P(x) và Q(x) cùng có giá trị không dương.

§7. NGHIỆM CỦA ĐA THỨC MỘT BIẾN

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Nếu tại x = a, đa thức P(x) có giá trị bằng 0 thì ta nói a (hoặc x = a) là một nghiệm của đa thức.

Chú ý:

– Một đa thức (khác đa thức không) có thể có một nghiệm, hai nghiệm... hoặc không có nghiệm.

– Số nghiệm của một đa thức (khác đa thức không) không vượt quá bậc của nó.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 231. Kiểm tra xem số 2; –3; 1 có phải là nghiệm của đa thức $P(x) = x^2 - 3x + 2$

Giải

- $P(2) = 2^2 - 3.2 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$ nên x = 2 là nghiệm của đa thức $P(x) = x^2 - 3x + 2$
- $P(-3) = (-3)^2 - 3(-3) + 2 = 9 + 9 + 2 = 20$ nên x = –3 không là nghiệm của đa thức $P(x) = x^2 - 3x + 2$

- $P(1) = 1^2 - 3.1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$ nên $x = 1$ là nghiệm của đa thức $P(x) = x^2 - 3x + 2$

Bài 232. Tìm nghiệm của đa thức sau:

a) $Q(x) = 5x + 23$

b) $M(y) = 3 - \frac{1}{7}y$

Giải

a) $Q(x) = 0$

$5x + 23 = 0$

$5x = -23$

$x = \frac{-23}{5}$

Vậy nghiệm của đa thức $Q(x)$ là $x = \frac{-23}{5}$

b) $M(y) = 0$

$3 - \frac{1}{7}y = 0$

$-\frac{1}{7}y = -3$

$y = 21$

Vậy nghiệm của đa thức $M(y)$ là $y = 21$

Bài 233. Tìm nghiệm của đa thức sau:

a) $P(x) = (x - 2)(x + \frac{5}{7})$

b) $Q(x) = x^2 + 3x$

Giải

a) $P(x) = 0$

$(x - 2)(x + \frac{5}{7}) = 0$

$x - 2 = 0$ hoặc $x + \frac{5}{7} = 0$

$x = 2$ hoặc $x = -\frac{5}{7}$

Vậy nghiệm của đa thức là $x = 2$; $x = -\frac{5}{7}$

b) $Q(x) = 0$

$x^2 + 3x = 0$

$x(x + 3) = 0$

$x = 0$ hoặc $x + 3 = 0$

$x = 0$ hoặc $x = -3$

Vậy nghiệm của đa thức $Q(x)$ là $x = 0$; $x = -3$.

Bài 234. Chứng tỏ rằng đa thức sau vô nghiệm.

a) $P(x) = 2x^6 + 7$

b) $Q(x) = x^2 + 4x + 19$

Giải

a) Vì $x^6 \geq 0$ nên $2x^6 + 7 \geq 7 > 0$ với mọi x.

Do đó $P(x) = 2x^6 + 7$ không có nghiệm.

b) $Q(x) = x^2 + 4x + 19 = x^2 + 2x + 2x + 4 + 15$

$= x(x + 2) + 2(x + 2) + 15 = (x + 2)(x + 2) + 15$

$= (x + 2)^2 + 15 \geq 15 > 0$ với mọi x.

Do đó $Q(x) = x^2 + 4x + 19$ không có nghiệm.

Bài 235. Hãy viết một đa thức:

a) Có nghiệm duy nhất là –2006

b) Có hai nghiệm là 3 và –7

c) Không có nghiệm.

Giải

a) Có vô số đa thức. Chẳng hạn $P(x) = x + 2006$

b) Có vô số đa thức. Chẳng hạn $Q(x) = (x - 3)(x + 7)$

c) Có vô số đa thức. Chẳng hạn $M(x) = x^4 + 5$

Bài 236. Chứng minh rằng đa thức P(x) có ít nhất hai nghiệm:

$(x - 5)P(x) = (x + 2)P(x - 3)$

Giải

Vì $(x - 5)P(x) = (x + 2)P(x - 3)$ với mọi x nên

- Khi $x = 5$ thì $(5 - 5).P(5) = (5 + 2)P(5 - 3)$

$0 = 7.P(2)$

$P(2) = 0$

Vậy 2 là nghiệm của P(x).

- Khi $x = -2$ thì $(-2 - 5).P(-2) = (-2 + 2)P(-2 - 3)$

$-7P(-2) = 0$

Vậy –2 là nghiệm của P(x)

Do đó P(x) có ít nhất hai nghiệm là 2 và –2.

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

Bài 237. Cho hai đa thức: $A = x^2 - 3xy + 5y^2$

$B = 2x^2 + 3xy - 4y^2$

a) Tính A + B b) Tìm C biết A + C = B

Hướng dẫn

a) $A + B = 3x^2 + y^2$

b) $A + C = B$

$C = B - A$

$C = x^2 + 6xy - 9y^2$

Bài 238. Tính giá trị của đa thức $x^2y^2 + x^8y^8 - 5x^{10}y^{11}$, tại $x = 1$; $y = -1$

Hướng dẫn

Giá trị của đa thức: $x^2y^2 + x^8y^8 - 5x^{10}y^{11}$ tại $x = 1$, $y = -1$ là $1^2.(-1)^2 + 1^8.(-1)^8 - 5.1^{10}.(-1)^{11} = 1.1 + 1.1 - 5.1.(-1) = 7$

Bài 239. Xác định đa thức $P(x) = ax + b$ biết rằng $P(0) = 2007$, $P(1) = 2006$.

Hướng dẫn

$P(0) = a.0 + b$

$2007 = b.$

Vậy có $P(x) = ax + 2007$

Ta có $P(1) = a.1 + b$

$2006 = a + 2007$

$a = -1$

Bài 240. Cho đa thức bậc hai của P(x) thỏa mãn $P(1) = P(-1)$.

Chứng minh rằng $P(x) = P(-x)$ với mọi x.

Hướng dẫn

$P(x) = ax^2 + bx + c$

$P(1) = P(-1)$

$a + b + c = a - b + c$

$2b = 0$

$b = 0$

$P(x) = ax^2 + c$

Bài 241. Cho $P(x) = 5x^4 - 2x + 7x^3 + 8x^2 - x + 6$

$$Q(x) = 2x^2 - 6 + 8x^3 - 9x^4 + x^3$$

a) Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của hai đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến.

b) Tính $P(x) + Q(x)$; $P(x) - Q(x)$.

Hướng dẫn

a) $P(x) = 5x^4 - 2x + 7x^3 + 8x^2 - x + 6$

$= 5x^4 + 7x^3 + 8x^2 - 2x - x + 6$

$= 5x^4 + 7x^3 + 8x^2 - 3x + 6$

$Q(x) = 2x^2 - 6 + 8x^3 - 9x^4 + x^3$

$= 2x^2 - 6 + 8x^3 + x^3 - 9x^4$

$= 2x^2 - 6 + 9x^3 - 9x^4$

$= -9x^4 + 9x^3 + 2x^2 - 6$

Bài 242. Tìm nghiệm của đa thức:

a) $P(x) = x^2 - x^3$ b) $Q(x) = x^2 - 6x + 8$

Hướng dẫn

a) $P(x) = x^2(1 - x)$ b) $Q(x) = (x - 2)(x - 4)$

Bài 243. Chứng tỏ rằng các đa thức sau không có nghiệm.

a) $P(x) = x^2 - 10x + 27$ b) $Q(x) = x^2 + x + 1$

Hướng dẫn

a) $P(x) = (x - 5)^2 + 2$ b) $Q(x) = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$

Bài 244. Tìm một đa thức có ba nghiệm là 2, 3 và –4.

Hướng dẫn

$P(x) = (x - 2)(x - 3)(x + 4)$

Bài 245. Chứng minh rằng đa thức P(x) có ít nhất ba nghiệm biết:

$(x^2 - 1)P(x) = xP(x - 3)$

Hướng dẫn

- Khi $x = 1$ thì $(1^2 - 1)P(1) = 1.P(1 - 3)$ $\Rightarrow P(-2) = 0$
- Khi $x = -1$ thì $[(-1)^2 - 1].P(-1) = -1.P(-1 - 3)$ $\Rightarrow P(-4) = 0$
- Khi $x = 0$ thì $(0^2 - 1).P(0) = 0.P(0 - 3)$ $\Rightarrow P(-3) = 0$

PHẦN II: HÌNH HỌC

Chương I: ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC, ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

§1. HAI GÓC ĐỐI ĐỈNH

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. *Định nghĩa:* Hai góc đối đỉnh là hai góc mà mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh của góc kia.
2. *Tính chất:* Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 246. Hãy điền vào chỗ trống các phát biểu sau:

a) Hai góc có mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh của góc kia được gọi là hai góc...

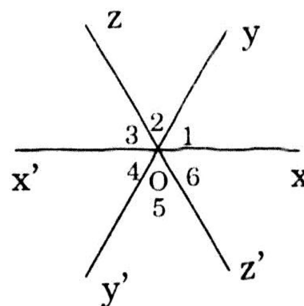
b) Hai đường thẳng thẳng cắt nhau tạo thành hai cặp góc..

Giải

a) Hai góc có mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh của góc kia được gọi là hai góc đối đỉnh.

b) Hai đường thẳng thẳng cắt nhau tạo thành hai cặp góc đối đỉnh.

Bài 247. Ba đường thẳng xx', yy', zz' cùng đi qua điểm O. Hãy nêu tên các cặp góc bằng nhau.



Giải

– Xét các góc đơn, (góc không có tia nào trong hình nằm giữa hai cạnh của góc), có ba cặp góc bằng nhau:

$\hat{O}_1 = \hat{O}_4$, $\hat{O}_2 = \hat{O}_5$, $\hat{O}_3 = \hat{O}_6$

– Xét các góc đối, (góc có một tia trong hình nằm giữa hai cạnh của góc) có ba cặp góc bằng nhau.

$\widehat{xOz} = \widehat{x'Oz'}$, $\widehat{yOx'} = \widehat{y'Ox}$, $\widehat{zOy'} = \widehat{z'Oy}$

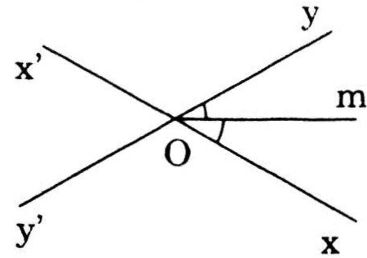
– Xét các góc ba, ở đây là góc bẹt, có ba cặp góc bằng nhau.

$\widehat{xOx'} = \widehat{yOy'}$, $\widehat{yOy'} = \widehat{zOz'}$, $\widehat{zOz'} = \widehat{xOx'}$

Bài 248. Cho hình bên, Om là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$

Chứng tỏ rằng:

$$\widehat{xOm} = \frac{1}{2}\widehat{x'Oy'}$$



Giải

$\widehat{xOm} = \frac{1}{2}\widehat{xOy}$ (Om là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$)

$\widehat{xOy} = \widehat{x'Oy'}$ (hai góc đối đỉnh)

Do đó $\widehat{xOm} = \frac{1}{2}\widehat{x'Oy'}$

Bài 249. Cho góc nhọn $\widehat{AOB}$, vẽ $\widehat{BOC}$ và $\widehat{AOD}$ là hai góc kề bù với góc $\widehat{AOB}$. Chứng tỏ rằng:

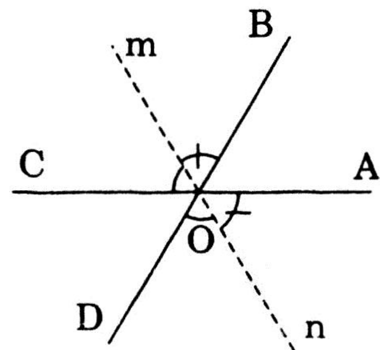
a) Hai góc $\widehat{BOC}$ và $\widehat{AOD}$ là hai góc đối đỉnh.

b) Hai tia phân giác của hai góc $\widehat{BOC}$ và $\widehat{AOD}$ là hai tia đối nhau.

Giải

a) Do $\widehat{AOB}$ và $\widehat{BOC}$ là hai góc kề bù nên:

$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 180^0 \Rightarrow$ hai tia OA và OC đối nhau. Tương tự hai góc $\widehat{AOB}$ và $\widehat{AOD}$ kề bù nên hai tia OB và OD đối nhau. Vậy hai góc $\widehat{BOC}$ và $\widehat{AOD}$ có mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh của góc kia nên chúng đối đỉnh.



b) Gọi Om là tia phân giác của góc $\widehat{BOC}$ và On là tia phân giác của góc $\widehat{AOD}$. Ta có:

$$\widehat{mOC} = \frac{1}{2}\widehat{COB}; \quad \widehat{nOA} = \frac{1}{2}\widehat{AOD}$$

Mà $\widehat{COB} = \widehat{AOD}$ (là hai góc đối đỉnh theo chứng minh trên)

$\Rightarrow \widehat{mOC} = \widehat{nOA}$.

Ta lại có: $\widehat{COn} + \widehat{nOA} = 180^0$ (hai góc $\widehat{COn}$ và $\widehat{nOA}$ kề bù).

$\Rightarrow \widehat{COn} + \widehat{mOC} = 180^0$ điều đó chứng tỏ góc $\widehat{COn}$ và $\widehat{mOC}$ kề bù $\Rightarrow$ hai tia Om và On đối nhau.

Bài 250. Cho ba tia OA, OB, OC sao cho $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA}$

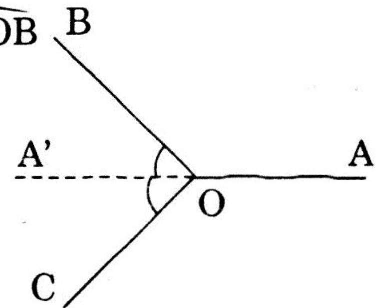
a) Chứng minh rằng tia đối của OA là tia phân giác của góc $\widehat{BOC}$, tia đối của tia OB là tia phân giác của góc $\widehat{AOC}$, tia đối của tia OC là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$.

b) Tìm số đo các góc $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ và $\widehat{COA}$.

Giải

a) Gọi OA' là tia đối của tia OA, ta có:

$\widehat{AOB} + \widehat{BOA'} = 180^0 \Rightarrow \widehat{BOA'} = 180^0 - \widehat{AOB}$



Tương tự ta có:

$\widehat{COA'} = 180^0 - \widehat{AOC}$

mà $\widehat{AOB} = \widehat{AOC}$ (đề bài cho)

$\Rightarrow \widehat{BOA'} = \widehat{COA'}$ (*)

Lại có: OB, OC nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ OA' mà

$\widehat{BOA'} + \widehat{COA'} = \widehat{BOC} < 180^0$

$\Rightarrow$ OA' nằm giữa hai tia OB và OC (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow$ OA' là tia phân giác của góc $\widehat{BOC}$.

Chứng minh tương tự ta có: OB', OC' là tia phân giác của góc còn lại.

b) Do OA' là tia phân giác của góc $\widehat{BOC}$ nên

$$\widehat{BOA'} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$$

mà $\widehat{AOB} + \widehat{BOA'} = 180^0 \Rightarrow \widehat{AOB} + \frac{1}{2}\widehat{AOB} = 180^0$

$\Rightarrow 3.\widehat{AOB} = 360^0 \Rightarrow \widehat{AOB} = 120^0$

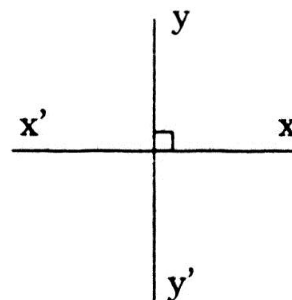
Do đó $\widehat{BOC} = \widehat{COA} = 120^0$

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Thế nào là hai đường thẳng vuông góc?

Hai đường thẳng xx', yy' cắt nhau và trong các góc tạo thành có một góc vuông gọi là hai đường thẳng vuông góc và được kí hiệu là xx' $\perp$ yy'.

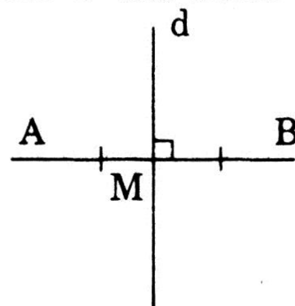


2. Tính chất

Có một và chỉ một đường thẳng a' đi qua điểm O cho trước và vuông góc với đường thẳng a cho trước.

3. Đường trung trực của đoạn thẳng

Đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng được gọi là đường trung trực của đoạn thẳng ấy.



Khi d là đường trung trực của đoạn thẳng AB, ta có hai điểm A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng d.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 251. Trong các câu sau, câu nào đúng? Câu nào sai? Hãy bác bỏ câu sai bằng một hình vẽ.

a) Hai đường thẳng vuông góc thì cắt nhau.

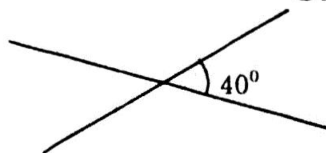
b) Hai đường thẳng cắt nhau thì vuông góc.

c) Hai đường thẳng không cắt nhau thì không vuông góc.

Giải

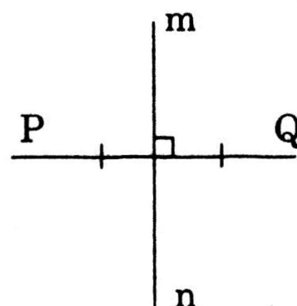
a) Đúng

b) Sai



c) Đúng

Bài 252. Cho đoạn thẳng PQ dài 5cm. Hãy vẽ đường trung trực của đoạn thẳng đó.

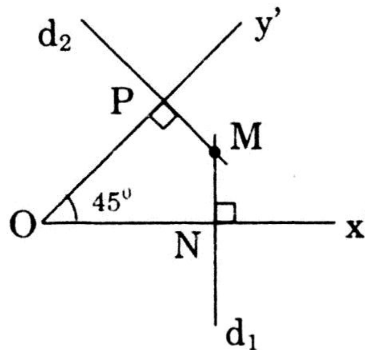


Giải

Bài 253. Vẽ hình theo cách diễn đạt bằng lời sau:

Vẽ góc $\widehat{x'Oy'}$ có số đo bằng 45^0. Lấy điểm M bất kì nằm trong góc $\widehat{x'Oy'}$. Qua M, vẽ đường thẳng d_1 vuông góc với tia Ox' tại N. Qua M vẽ đường thẳng d_2 vuông góc với tia Oy' tại P.

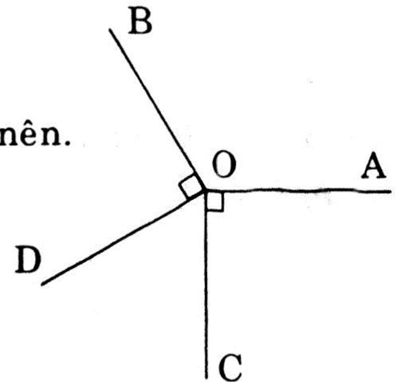
Giải



Bài 254. Cho góc tù $\widehat{AOB}$. Ở ngoài góc đó dựng các tia OC, OD theo thứ tự vuông góc với các tia OA, OB. Chứng minh rằng:

$\widehat{AOB} + \widehat{COD} = 180^0$

Giải



Ta có OA, OB, OC, OD là 4 tia chung gốc nên.

$\widehat{AOB} + \widehat{BOD} + \widehat{DOC} + \widehat{COA} = 360^0$

mà $\widehat{AOC} = \widehat{BOD} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{AOC} + \widehat{BOD} = 180^0$

Nên $\widehat{AOB} + \widehat{COD} = 180^0$

Bài 255. Cho góc vuông $\widehat{AOB}$, hai tia OC, OD ở trong đó sao cho $\widehat{AOC} = \widehat{BOD} = 60^0$. Trên nửa mặt phẳng bờ OA có chứa tia OB vẽ OE sao cho OB là tia phân giác của góc $\widehat{DOE}$.

a) Hai tia OC, OD là tia phân giác của những góc nào?

b) Chứng minh: $OC \perp OE$.

Giải

a) Ta có $\widehat{AOC} < \widehat{AOB}$

$(60^0 < 90^0)$ nên OC nằm giữa hai tia OA và OB.

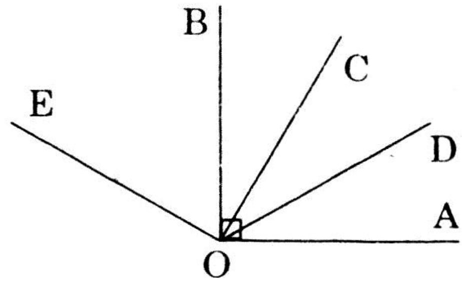
$\Rightarrow \widehat{BOC} = \widehat{AOB} - \widehat{AOC}$

$= 90^0 - 60^0 = 30^0$ (1)

Tương tự OD nằm giữa hai tia OA và OB nên:

$\widehat{AOD} = \widehat{AOB} - \widehat{BOD}$

$= 90^0 - 60^0 = 30^0$



$\Rightarrow \widehat{AOD} < \widehat{AOC}$ $(30^0 < 60^0)$

$\Rightarrow \widehat{DOC} = \widehat{AOC} - \widehat{AOD}$

$= 60^0 - 30^0 = 30^0$ (2)

Mặt khác $\widehat{AOD} < \widehat{AOC} < \widehat{AOB}$

$(30^0 < 60^0 < 90^0)$

$\Rightarrow$ Tia OC nằm giữa hai tia OB và OD (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow$ Tia OC là tia phân giác của góc $\widehat{BOD}$.

Tương tự ta chứng minh được tia OD nằm giữa hai tia OA và OC đồng thời $\widehat{AOD} = \widehat{COD} = 30^0$

Do đó tia OD là tia phân giác của góc $\widehat{AOC}$.

b) Ta có: $\widehat{BOD} = 60^0$ mà OB là tia phân giác góc $\widehat{DOE}$.

$\Rightarrow \widehat{DOE} = 120^0$ mà $\widehat{DOC} < \widehat{DOE}$ $(30^0 < 120^0)$ nên tia OC nằm giữa hai tia OD và OE.

$\Rightarrow \widehat{EOC} = \widehat{DOE} - \widehat{DOC}$

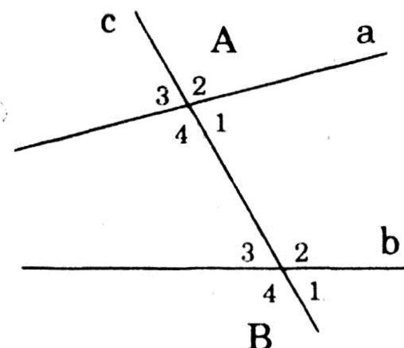
$= 120^0 - 30^0 = 90^0$ chứng tỏ $OC \perp OE$.

§3. CÁC GÓC TẠO BỞI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CẮT HAI ĐƯỜNG THẲNG

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Góc so le trong. Góc đồng vị.

a) Các cặp góc A_1 và B_3, A_4 và B_2 được gọi là các cặp góc so le trong.



b) Các cặp góc A_1 và B_1, A_2 và B_2, A_3 và B_3, A_4 và B_4 còn lại là các cặp góc đồng vị.

2. Tính chất

Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp so le trong bằng nhau thì:

a) Hai góc so le trong được gọi là bằng nhau.

b) Hai góc đồng vị bằng nhau.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 256. Xem hình bên rồi viết tiếp vào chỗ chấm.

a) $\widehat{AMN}$ và $\widehat{BMN}$ là một cặp góc .....

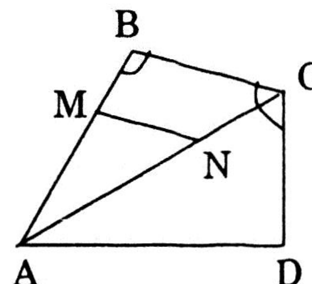
b) $\widehat{ABC}$ và $\widehat{AMN}$ là một cặp góc .....

c) $\widehat{BAC}$ và $\widehat{DCA}$ là một cặp góc .....

d) $\widehat{ANM}$ và $\widehat{DAN}$ là một cặp góc .....

c) $\widehat{ANM}$ và $\widehat{CNM}$ là một cặp góc .....

d) $\widehat{ANM}$ và $\widehat{NCB}$ là một cặp góc .....



Giải

a) $\widehat{AMN}$ và $\widehat{BMN}$ là một cặp góc kề bù

b) $\widehat{ABC}$ và $\widehat{AMN}$ là một cặp góc đồng vị

c) $\widehat{BAC}$ và $\widehat{DCA}$ là một cặp góc so le trong

d) $\widehat{ANM}$ và $\widehat{DAN}$ là một cặp góc so le trong

c) $\widehat{ANM}$ và $\widehat{CNM}$ là một cặp góc kề bù

d) $\widehat{ANM}$ và $\widehat{NCB}$ là một cặp góc đồng vị.

Bài 257. Cho hình bên. Đúng ghi Đ, sai ghi S vào chỗ trống:

$\widehat{N}_1 = 130^0$ ☐

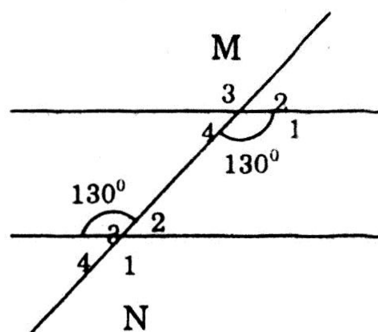
$\widehat{N}_2 = 130^0$ ☐

$\widehat{N}_4 = 50^0$ ☐

$\widehat{M}_4 + \widehat{N}_3 = 180^0$ ☐

$\widehat{M}_3 + \widehat{N}_2 = 100^0$ ☐

$\widehat{M}_2 + \widehat{N}_2 = 100^0$ ☐



Giải

$\widehat{N}_1 = 130^0$ Đ

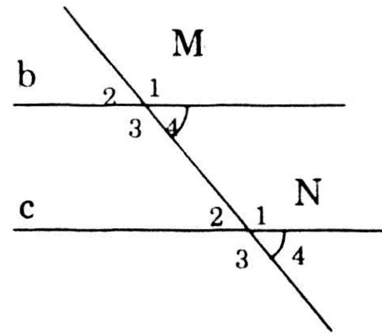
$\widehat{N}_2 = 130^0$ S

$\widehat{N}_4 = 50^0$ Đ

$\widehat{M}_4 + \widehat{N}_3 = 180^0$ Đ

$\widehat{M}_3 + \widehat{N}_2 = 100^0$ S ; $\widehat{M}_2 + \widehat{N}_2 = 100^0$ Đ

Bài 258. Cho hình bên trong đó $\widehat{M}_4 = \widehat{N}_4$



Nêu rõ quan hệ từng cặp góc sau:

a) $\widehat{M}_2$ và $\widehat{N}_2$

b) $\widehat{M}_4$ và $\widehat{N}_1$

c) $\widehat{M}_3$ và $\widehat{N}_1$

Giải

a) $\widehat{M}_2 = \widehat{M}_4$ (đối đỉnh), $\widehat{N}_2 = \widehat{N}_4$ (đối đỉnh)

$\widehat{M}_4 = \widehat{N}_4$ (đầu bài cho)

Do đó $\widehat{M}_2 = \widehat{N}_2$

b) $\widehat{N}_4 + \widehat{N}_1 = 180^0$ (kề bù), $\widehat{N}_4 = \widehat{M}_4$ (đầu bài cho)

Do đó $\widehat{M}_4 + \widehat{N}_1 = 180^0$

c) $\widehat{M}_4 + \widehat{M}_3 = 180^0$ (kề bù), $\widehat{N}_4 + \widehat{N}_1 = 180^0$ (kề bù)

$\widehat{M}_4 = \widehat{N}_4$ (đầu bài cho)

Do đó $\widehat{M}_3 = \widehat{N}_1$

§4. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song:

Tính chất:

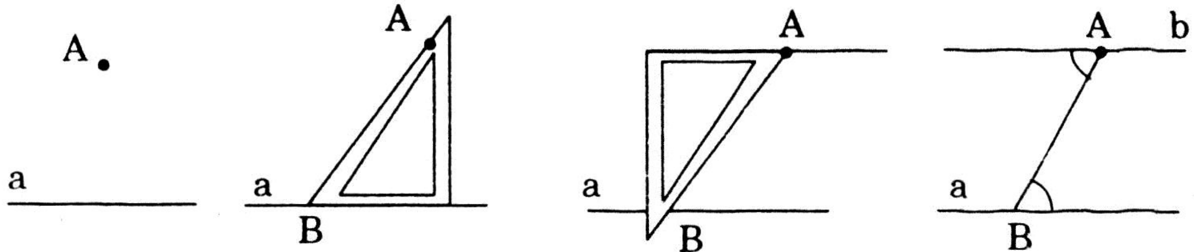
Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau (hoặc một cặp góc đồng vị bằng nhau) thì a và b song song với nhau.

Hai đường thẳng a, b song song được kí hiệu là a // b.

2. Vẽ hai đường thẳng song song:

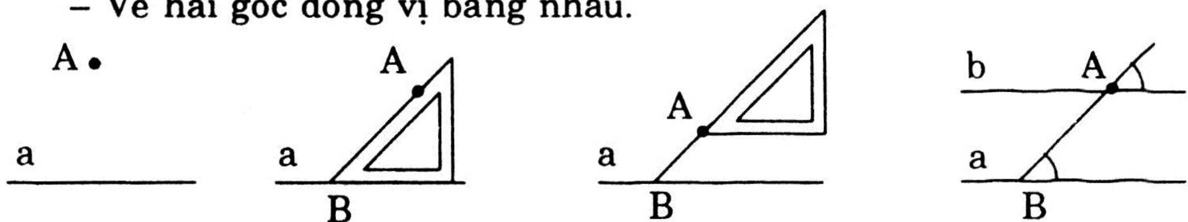
Vẽ đường thẳng b đi qua A cho trước ($A \notin a$) và song song với a. Cách vẽ được minh họa ở các hình sau:

– Vẽ hai góc so le trong bằng nhau.



Dùng góc nhọn 60^0 của êke để vẽ hai góc so le trong bằng nhau.

– Vẽ hai góc đồng vị bằng nhau.

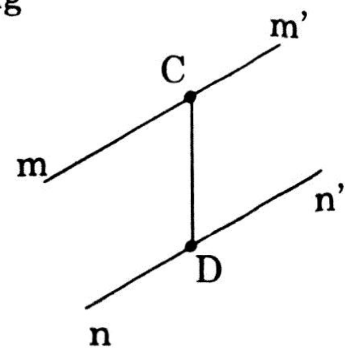


Dùng góc nhọn của êke để vẽ hai góc đồng vị bằng nhau.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 259. a) Cho hai điểm C và D. Hãy vẽ một đường thẳng mm' đi qua C và đường thẳng nn' đi qua D sao cho nn' song song mm'.

b) Kể tên các cặp góc so le trong.



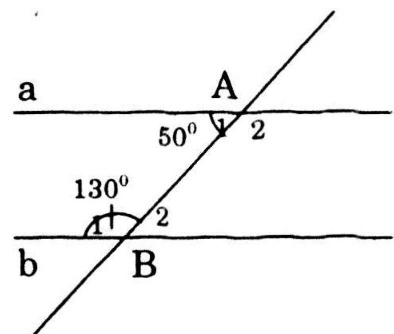
Giải

b) Cặp góc so le trong: $\widehat{mCD}$ và $\widehat{n'DC}$

Cặp góc so le trong: $\widehat{nDC}$ và $\widehat{m'CD}$

Bài 260. Cho hình bên hãy chứng tỏ a // b bằng hai cách.

Giải



Cách 1:

$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 180^0$ (kề bù),

$\widehat{A}_1 = 50^0$ (đầu bài cho)

Do đó $\widehat{A}_2 = 180^0 - 50^0$

$\widehat{A}_2 = 130^0$

Ta có $\hat{A}_2 = \hat{B}_1$ (= 130^0), $\hat{A}_2$ và $\hat{B}_1$ là một cặp góc so le trong.

$\Rightarrow$ a // b

Cách 2:

$\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180^0$ (kề bù), $\hat{B}_1 = 130^0$ (đầu bài cho)

Do đó $\hat{B}_2 = 180^0 - 130^0$

$\hat{B}_2 = 50^0$

Ta có $\hat{B}_2 = \hat{A}_1$ (= 50^0), $\hat{B}_2$ và $\hat{A}_1$ là một cặp góc so le trong.

$\Rightarrow$ a // b

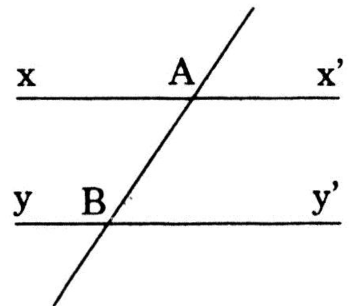
Bài 261. Trên hình bên có hai đường thẳng xx' và yy' phân biệt.

Hãy nêu cách nhận biết xem hai đường thẳng xx' và yy' song song và hay cắt nhau bằng dụng cụ thước đo góc?

Giải

Lấy điểm A trên đường thẳng xx', lấy điểm B trên đường thẳng yy'. Vẽ đường thẳng AB. Dùng thước đo góc để đo các góc $\widehat{xAB}$, $\widehat{ABy'}$.

Có hai trường hợp xảy ra:



1. $\widehat{xAB} = \widehat{ABy'}$ mà $\widehat{xAB}$ và $\widehat{ABy'}$ so le trong

   Do vậy: xx' // yy'

2. $\widehat{xAB} \neq \widehat{ABy'}$ mà $\widehat{xAB}$ và $\widehat{ABy'}$ so le trong.

   Do vậy xx' và yy' không song song nhau.

   Suy ra hai đường thẳng xx' và yy' cắt nhau.

Bài 262. Cho hình vẽ bên, chứng tỏ rằng BC // AD.

Giải

Ta có: $\widehat{ABC} = 360^0 - (\widehat{ABE} + \widehat{EBC})$,

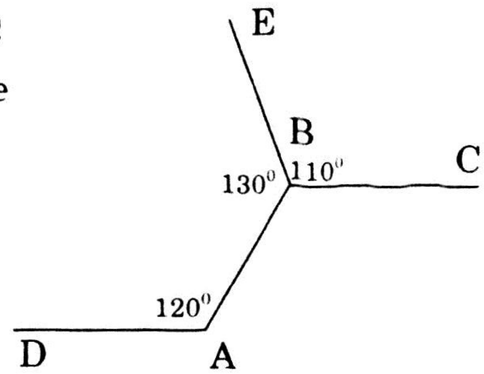
$\widehat{ABE} = 130^0$ (đầu bài cho) **và**

$\widehat{EBC} = 110^0$ (đầu bài cho)

Do đó $\widehat{ABC} = 360^0 - (130^0 + 110^0) = 120^0$

Vậy $\widehat{ABC} = \widehat{BAD}$ (= 120^0), $\widehat{ABC}$ và $\widehat{BAD}$ là một cặp góc so le trong.

Suy ra BC // AD.

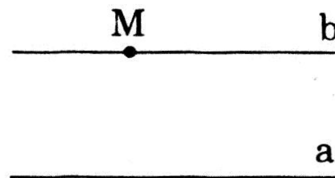


§5. TIÊN ĐỀ Ơ-CLIT VỀ ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Tiên đề Ơ–clit:

Qua một điểm ở ngoài một đường thẳng chỉ có một đường thẳng song song với đường thẳng đó.



Qua điểm M nằm ngoài đường thẳng a, đường thẳng b đi qua M và song song với a là duy nhất.

2. Tính chất của hai đường thẳng song song:

Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì:

a) Hai góc so le trong bằng nhau.

b) Hai góc đồng vị bằng nhau.

c) Hai góc trong cùng phía bù nhau.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 263. Điền vào chỗ trống trong các phát biểu sau:

Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì:

a) Hai góc đồng vị được tạo ra do một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song là hai góc ...

b) Hai góc trong cùng phía được tạo ra do một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song là hai góc ...

Giải

- Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì:

a) Hai góc đồng vị được tạo ra do một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song là hai góc bằng nhau

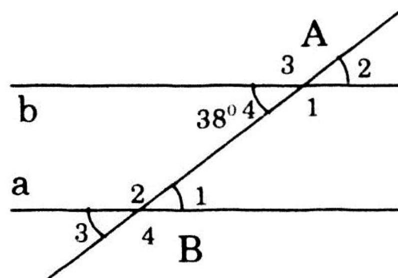
b) Hai góc trong cùng phía được tạo ra do một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song là hai góc bù nhau.

Bài 264. Hình vẽ cho biết a // b và $\widehat{A}_4 = 38^0$.

a) Tính $\widehat{A}_1$

b) So sánh $\widehat{A}_1$ và $\widehat{B}_4$

c) Tính $\widehat{B}_2$



Giải

a) a // b, góc $\widehat{A}_4$ và $\widehat{B}_1$ so le trong.

$\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{A}_4 = 38^0$

b) $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_4 = 180^0$ ($\widehat{A}_1$ và $\widehat{A}_4$ kề bù)

$\widehat{B}_4 + \widehat{B}_1 = 180^0$ ($\widehat{B}_4$ và $\widehat{B}_1$ kề bù)

mà $\widehat{A}_4 = \widehat{B}_1$ (theo câu a) do đó $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_4$

c) a // b, $\widehat{A}_4$ và $\widehat{B}_2$ là hai góc trong cùng phía

$\Rightarrow \widehat{A}_4 + \widehat{B}_2 = 180^0$

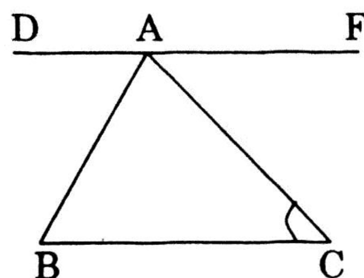
$38^0 + \widehat{B}_2 = 180^0$

Vậy $\widehat{B}_2 = 180^0 - 38^0 = 142^0$

Bài 265. Cho hình vẽ bên có $\widehat{DAB} = \widehat{ABC}$, $\widehat{FAC} = \widehat{ACB}$.

Chứng tỏ rằng D, A, F thẳng hàng.

Giải



Ta có $\widehat{DAB} = \widehat{ABC}$ (đầu bài cho),

$\widehat{DAB}$ và $\widehat{ABC}$ là một cặp góc so le trong.

$\Rightarrow$ AD // BC (1)

Mặt khác $\widehat{FAC} = \widehat{ACB}$ (đầu bài cho)

$\widehat{FAC}$ và $\widehat{ACB}$ là một cặp góc so le trong.

$\Rightarrow$ AF // BC (2)

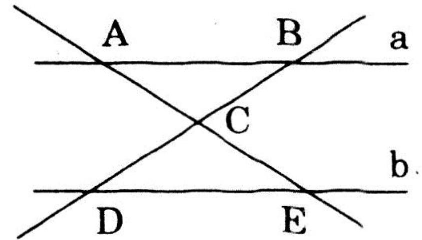
Từ (1) và (2) ta có hai đường thẳng AD và AF trùng nhau.

Vậy ba điểm D, A, F thẳng hàng.

Bài 266. Cho hình bên (a // b).

Hãy nêu tên các cặp góc bằng nhau của hai tam giác ABC và CDE.

Giải



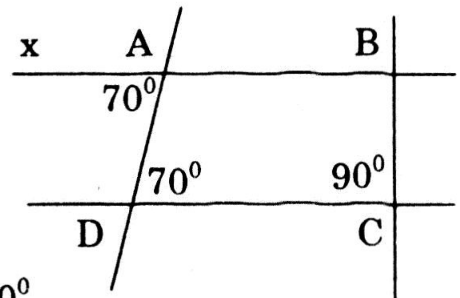
Ta có $\widehat{BAC}$ và $\widehat{CED}$ là một cặp góc so le trong, a // b nên $\widehat{BAC} = \widehat{CED}$

$\widehat{ABC}$ và $\widehat{EDC}$ là một cặp góc so le trong, a // b nên $\widehat{ABC} = \widehat{EDC}$

$\widehat{ACB} = \widehat{DCE}$ (đối đỉnh)

Bài 267. Cho hình bên. Tính số đo góc $\widehat{ABC}$

Giải



$\widehat{xAD} = \widehat{ADC}$ ($= 70^0$), $\widehat{xAD}$ và $\widehat{ADC}$ là một cặp góc so le trong.

$\Rightarrow$ AB // CD

Mà $\widehat{ABC}$ và $\widehat{BCD}$ là một cặp góc trong cùng phía.

Do đó $\widehat{ABC} + \widehat{BCD} = 180^0$, $\widehat{BCD} = 90^0$ (đầu bài cho)

$\Rightarrow \widehat{ABC} = 180^0 - 90^0 = 90^0$

§6. TỪ VUÔNG GÓC ĐẾN SONG SONG

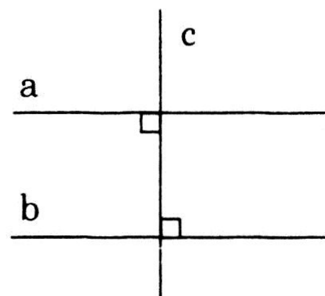
A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Quan hệ giữa tính vuông góc và tính song song:

Các tính chất:

Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng kia.



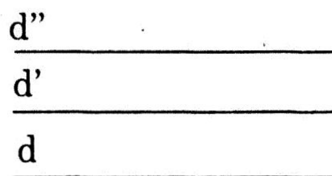
$a \perp c$ và $b \perp c \Rightarrow a // b$

$c \perp a$ và $a // b \Rightarrow c \perp b$.

2. Ba đường thẳng song song.

Tính chất:

Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.



$d' // d$ và $d'' // d \Rightarrow d' // d''$

Khi ba đường thẳng d, d’, d” song song với nhau từng đôi một, ta nói ba đường thẳng ấy song song với nhau và kí hiệu là: $d // d' // d''$.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 268. Căn cứ vào hình bên hãy điền vào chỗ trống (...)

Nếu $m // p$ và $n // p$ thì ...

m
n
p

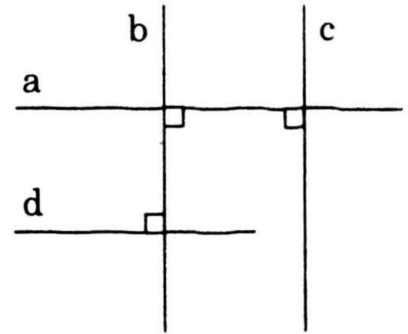
Giải

Nếu $m // p$ và $n // p$ thì $m // n$

Bài 269. Căn cứ vào hình bên hãy điền vào chỗ trống (...)

Nếu $b \perp a$ và $c \perp a$ thì ...

Nếu b // c và d ⊥ b thì ...



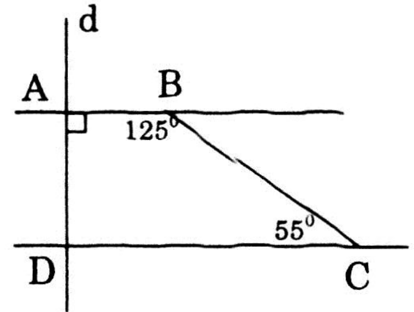
Giải

Nếu b ⊥ a và c ⊥ a thì b // c

Nếu b // c và d ⊥ b thì d ⊥ c

Bài 270. Cho hình bên. Chứng tỏ rằng d ⊥ CD

Giải



$\widehat{ABC}$ và $\widehat{BCD}$ là một cặp góc trong cùng phía và $\widehat{ABC} + \widehat{BCD} = 125^0 + 55^0 = 180^0$

⇒ AB // CD

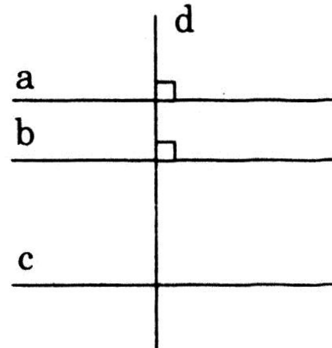
Ta có d ⊥ AB (đầu bài cho), AB // CD.

Do đó d ⊥ CD

Bài 271. Cho hình bên (a ⊥ d, b ⊥ d, b // c)

Chứng tỏ rằng a // b // c.

Giải



Ta có a ⊥ d, b ⊥ d (đầu bài cho)

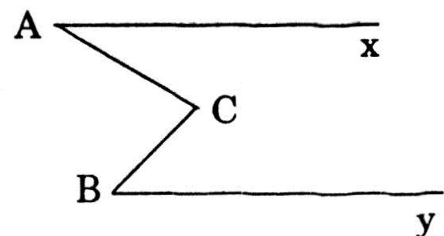
⇒ a // b

a // b và b // c (đầu bài cho)

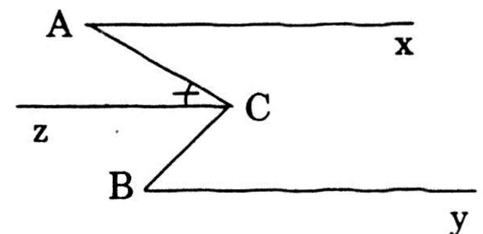
Do đó a // b // c

Bài 272. Trên hình bên cho biết $\widehat{ACB} > \widehat{xAC}$, Ax // By.

Chứng minh rằng $\widehat{ACB} = \widehat{xAC} + \widehat{CBy}$



Giải



Trên nửa mặt phẳng bờ AC có chứa tia CB vẽ tia Cz sao cho $\widehat{xAC} = \widehat{ACz}$.

Ta có $\widehat{xAC} = \widehat{ACz}$, $\widehat{xAC}$ và $\widehat{ACz}$ so le trong, suy ra Ax // Cz.

Trên nửa mặt phẳng bờ AC có $\widehat{ACz} < \widehat{ACB}$

(vì $\widehat{ACB} > \widehat{xAC}$, $\widehat{xAC} = \widehat{ACz}$) nên tia Cz nằm giữa hai tia CA và CB.

Do đó $\widehat{ACB} = \widehat{ACz} + \widehat{zCB}$.

Mặt khác, Ax // Cz, Ax // By ⇒ By // Cz

By // Cz ⇒ $\widehat{zCB} = \widehat{CBy}$

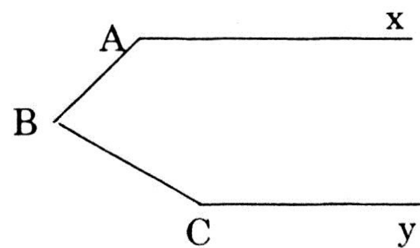
⇒ $\widehat{ACB} = \widehat{ACz} + \widehat{zCB}$

$= \widehat{xAC} + \widehat{CBy}$

Bài 273. Trên hình bên cho biết

$\widehat{xAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCy} = 360^0$

Chứng minh rằng Ax // Cy



Giải

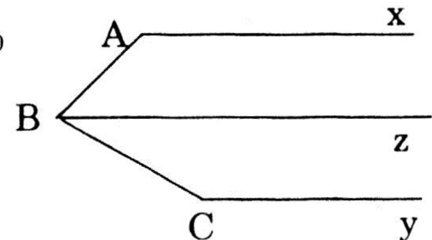
Vẽ tia Bz sao cho $\widehat{xAB} + \widehat{ABz} = 180^0$, mà $\widehat{xAB}$ và $\widehat{ABz}$ là hai góc trong cùng phía suy ra Ax // Bz (1)

Mặt khác: $\widehat{xAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCy} = 360^0$

$\widehat{xAB} + \widehat{ABz} + \widehat{zBC} + \widehat{BCy} = 360^0$

$180^0 + \widehat{zBC} + \widehat{BCy} = 360^0$

⇒ $\widehat{zBC} + \widehat{BCy} = 180^0$



Mà $\widehat{zBC}$ và $\widehat{BCy}$ là hai góc trong cùng phía, do đó: Cy // Bz (2).

Từ (1) và (2) ta có Ax // Cy.

§7. ĐỊNH LÍ

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định lí:

Định lí là khẳng định suy ra những khẳng định được coi là đúng.

Khi định lí được phát biểu dưới dạng "Nếu... thì", phần nằm

giữa từ "Nếu" và từ "thì" là giả thiết, phần sau từ "thì" là phần kết luận.

Giả thiết và kết luận được viết tắt tương ứng là GT và KL.

2. Chứng minh định lí

Chứng minh định lí là dùng lập luận kể từ giả thiết suy ra kết luận.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 274. Hãy chỉ ra giả thiết và kết luận của các định lí sau bằng kí hiệu:

a) Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng sao cho có một cặp góc so le trong bằng nhau thì hai đường thẳng đó song song.

b) Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì hai góc so le trong bằng nhau.

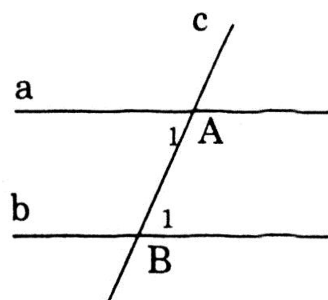
Giải

a)

GT	$\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$
KL	a // b

b)

GT	a // b
KL	$\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$



Bài 275. Hãy viết kết luận của các định lí sau bằng cách điền vào chỗ (...):

a) Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì ...

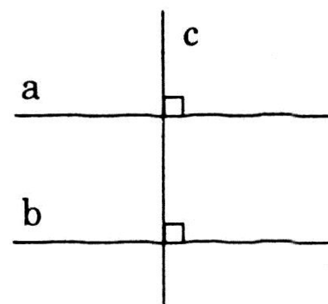
b) Vẽ hình minh họa định lí đó và viết giả thiết, kết luận bằng kí hiệu.

Giải

a) Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì hai đường thẳng đó song song với nhau.

b) Hình minh họa.

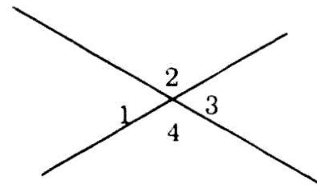
GT	$a \perp c$, $b \perp c$
KL	a // b



Bài 276. Hãy viết tiếp chỗ trống để chứng minh định lí:

"Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau".

GT	...
KL	...



Các khẳng định		Căn cứ của khẳng định
1	$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 180^0$	Vì
2	$\widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 = ...$	Vì ...
3	$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \widehat{A}_2 ...$	Căn cứ vào ...
4	$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_3$	....
5	$\widehat{A}_2 = \widehat{A}_4$	....

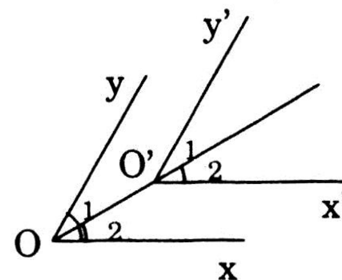
Giải

GT	$\widehat{A}_1$ đối đỉnh với $\widehat{A}_3$, $\widehat{A}_2$ đối đỉnh với $\widehat{A}_4$
KL	$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_3$; $\widehat{A}_2 = \widehat{A}_4$

Các khẳng định		Căn cứ của khẳng định
1	$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 180^0$	Vì $\widehat{A}_1$ và $\widehat{A}_2$ kề bù
2	$\widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 = 180^0$	Vì $\widehat{A}_2$ và $\widehat{A}_3$ kề bù
3	$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3$	Căn cứ vào 1 và 2
4	$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_3$	Suy từ 3
5	$\widehat{A}_2 = \widehat{A}_4$	Chứng minh tương tự trên

Bài 277. Chứng minh rằng: Nếu hai góc nhọn xOy và x'O'y' có Ox // O'x', Oy // O'y' thì $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$

Giải



GT	$\widehat{xOy}$ và $\widehat{x'O'y'}$ đều nhọn Ox // O'x'; Oy // O'y'
KL	$\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$

Chứng minh

Vẽ tia OO' ta có

$\hat{O}_1 = \hat{O}'_1$ ($\hat{O}_1$ và $\hat{O}'_1$ đồng vị; Oy // O'y')

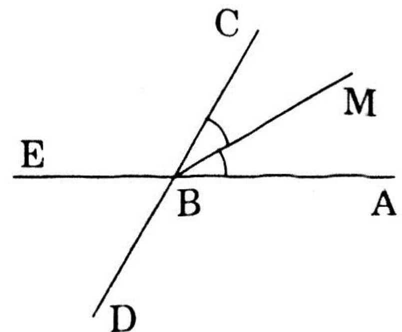
$\hat{O}_2 = \hat{O}'_2$ ($\hat{O}_2$ và $\hat{O}'_2$ đồng vị; Oy // O'y')

Suy ra $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{O}'_1 + \hat{O}'_2$

Hay $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$

Bài 278. Cho hai góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{DBE}$ đối đỉnh. Vẽ BM là tia phân giác của góc $\widehat{ABC}$. Chứng minh rằng $\widehat{ABM} = \frac{1}{2}\widehat{DBE}$

Giải



GT	$\widehat{ABC}$ và $\widehat{DBE}$ đối đỉnh, BM là tia phân giác $\widehat{ABC}$
KL	$\widehat{ABM} = \frac{1}{2}\widehat{DBE}$

Chứng minh

Ta có: $\widehat{ABC} = \widehat{DBE}$ (đối đỉnh)

$\widehat{ABM} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$ (BM là tia phân giác góc $\widehat{ABC}$)

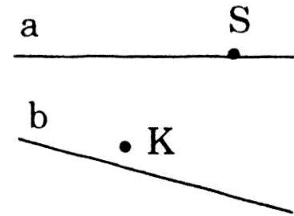
Suy ra $\widehat{ABM} = \frac{1}{2}\widehat{DBE}$

ÔN TẬP CHƯƠNG I

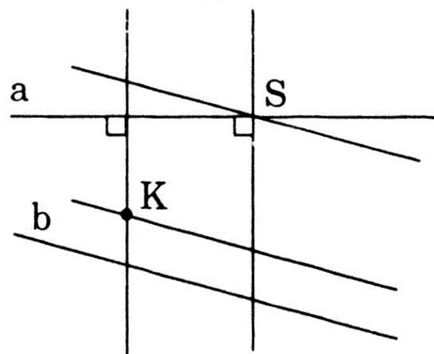
Bài 279. Vẽ lại hình bên rồi vẽ thêm:

a) Các đường thẳng vuông góc với a đi qua S, đi qua K.

b) Các đường thẳng song song với b đi qua S, đi qua K.



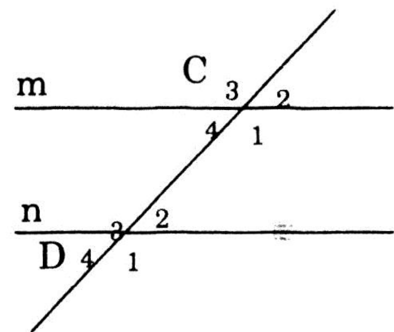
Hướng dẫn



Bài 280. Hình bên cho biết

$\hat{C}_4 = \hat{D}_4$

Chứng minh rằng m // n



Hướng dẫn

$\hat{D}_2 = \hat{D}_4$ đối đỉnh

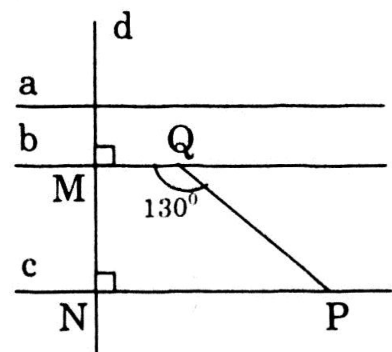
$\hat{C}_4 = \hat{D}_4$ (gt)

Suy ra $\hat{C}_4 = \hat{D}_2$

Bài 281. Cho hình bên có a // c, b ⊥ d, c ⊥ d, $\widehat{MQP} = 130^0$

a) Tính số đo góc $\widehat{NPQ}$

b) Chứng minh rằng d ⊥ a



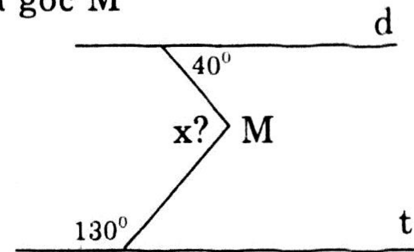
Hướng dẫn

a) b ⊥ d, c ⊥ d ⇒ b // c

⇒ $\widehat{MQP} + \widehat{NPQ} = 180^0$

b) d ⊥ c và a // c ⇒ d ⊥ a

Bài 282. Cho hình bên, hãy tính số đo x của góc M



Hướng dẫn

Vẽ đường thẳng song song với d đi qua điểm M

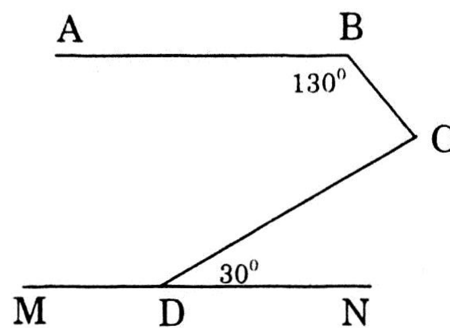
$x = 90^0$.

Bài 283. Cho hình bên hãy tính số đo $\widehat{BCD}$.

Hướng dẫn

Vẽ đường thẳng song song với AB đi qua điểm C.

$\widehat{BCD} = 80^0$



Chương II: TAM GIÁC

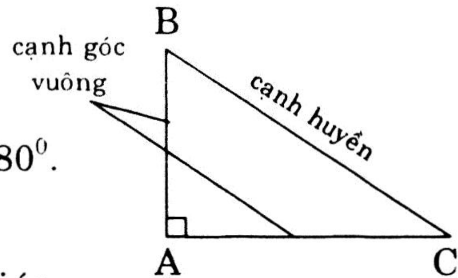
§1. TỔNG BA GÓC CỦA MỘT TAM GIÁC

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Tổng ba góc của một tam giác:

Định lí:

Tổng ba góc của một tam giác bằng 180^0.



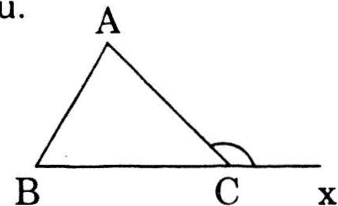
2. Áp dụng vào tam giác vuông

Định nghĩa: Tam giác vuông là tam giác có một góc vuông.

Định lí:

Trong tam giác vuông hai góc nhọn phụ nhau.

3. Góc ngoài của tam giác



Định nghĩa: Góc ngoài của một tam giác là góc kề bù với một góc của tam giác ấy.

Góc $\widehat{BCx}$ là góc ngoài tại đỉnh C của ΔABC.

Định lí:

Mỗi góc ngoài của một tam giác bằng tổng của hai góc trong không kề với nó.

Nhận xét: Góc ngoài của tam giác lớn hơn mỗi góc không kề với nó.

$\widehat{ACx} > \hat{A}$, $\widehat{ACx} > \hat{B}$

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 248. Nhận xét tam giác ABC:

a) Biết $\hat{A} = 50^0$, $\hat{B} = 65^0$, tính $\hat{C}$.

b) Biết $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$. Tính mỗi góc của tam giác ABC.

Giải

ΔABC có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0$

a) Ta có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0$. Mà $\hat{A} = 50^0$, $\hat{B} = 65^0$

Do đó $50^0 + 65^0 + \hat{C} = 180^0$

$\Rightarrow \hat{C} = 180^0 - (50^0 + 65^0)$

$\hat{C} = 65^0$

b) Ta có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0$. Mà $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$.

Do đó $\hat{A} + \hat{A} + \hat{A} = 180^0$

$3\hat{A} = 180^0$

$\hat{A} = 180^0 : 3$

$\hat{A} = 60^0$

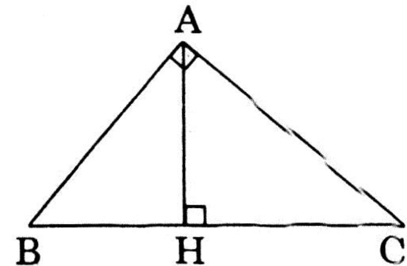
Nên $\hat{B} = 60^0$; $\hat{C} = 60^0$

Bài 285. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B} = 50^0$. Vẽ AH ⊥ BC tại H. Tính $\widehat{HAC}$.

Giải

ΔABC vuông tại A nên $\hat{B} + \hat{C} = 90^0$

mà $\hat{B} = 50^0$.



Do đó $50^0 + \hat{C} = 90^0$

$\hat{C} = 90^0 - 50^0$

$\hat{C} = 40^0$

AH ⊥ BC tại H nên

ΔHAC vuông tại H, ta có:

$\widehat{HAC} + \hat{C} = 90^0$

$\widehat{HAC} + 40^0 = 90^0$

$\widehat{HAC} = 90^0 - 40^0$

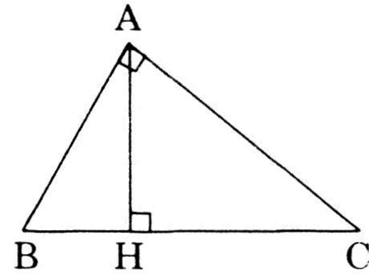
$\widehat{HAC} = 50^0$

Bài 286. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ AH vuông góc với BC (H ∈ BC).

a) Tìm các cặp góc phụ nhau trong hình vẽ.

b) Tìm các cặp góc nhọn bằng nhau trong hình vẽ.

Giải



a) $\widehat{BAH}$ và $\widehat{CAH}$ phụ nhau

$\widehat{ABH}$ và $\widehat{BAH}$ phụ nhau

$\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$ phụ nhau

$\widehat{HAC}$ và $\widehat{ACH}$ phụ nhau

b) Các cặp góc nhọn bằng nhau trong hình vẽ là:

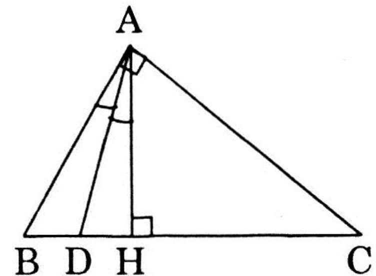
$\widehat{BAH}$ và $\widehat{ACH}$;

$\widehat{ABH}$ và $\widehat{HAC}$;

Bài 287. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Tia phân giác góc BAH cắt BH ở D. Chứng minh rằng $\widehat{CAD} = \widehat{CDA}$

Giải

GT	ΔABC ($\widehat{A} = 90^0$), $AH \perp BC$ AD là tia phân giác $\widehat{BAH}$
KL	$\widehat{CAD} = \widehat{CDA}$



Chứng minh:

Ta có $\widehat{CAD} + \widehat{BAD} = \widehat{BAC}$, $\widehat{BAC} = 90^0$

Nên $\widehat{CAD} + \widehat{BAD} = 90^0$ (1)

Mặt khác ΔADH vuông tại H nên

$\widehat{HDA} + \widehat{DAH} = 90^0$ (2)

mà $\widehat{BAD} = \widehat{DAH}$ (AD là tia phân giác $\widehat{BAH}$) (3)

Từ (1), (2) và (3) có $\widehat{CAD} = \widehat{CDA}$

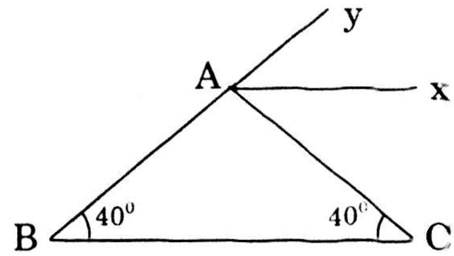
Bài 288. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = \widehat{C} = 40^0$. Gọi Ax là tia phân giác của góc ngoài ở đỉnh A. Hãy chứng tỏ rằng Ax // BC.

Giải

Gọi Ay là tia đối của tia AB.

$\widehat{yAC} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 40^0 + 40^0 = 80^0$

($\widehat{yAC}$ là góc ngoài của ΔABC)



$\widehat{xAC} = \frac{1}{2}\widehat{yAC} = \frac{1}{2}.80^0 = 40^0$

(Ax là tia phân giác $\widehat{yAC}$)

$\widehat{xAC} = \widehat{ACB}$ (= 40^0)

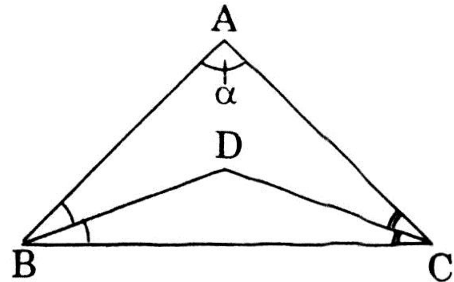
$\widehat{xAC}$ và $\widehat{ACB}$ so le trong

Do đó Ax // BC.

Bài 289. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = \alpha$. Các tia phân giác của các góc B và C cắt nhau D.

Tính số đo góc $\widehat{BDC}$ theo α

Giải



Ta có ΔABC có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0$

Mà $\hat{A} = \alpha$ (gt)

Suy ra $\hat{B} + \hat{C} = 180^0 - \alpha$

Mặt khác

$\widehat{DBC} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$ (BD là tia phân giác góc $\widehat{ABC}$) và $\widehat{DCB} = \frac{1}{2}\widehat{ACB}$ (CD là phân giác góc $\widehat{ABC}$).

Do đó $\widehat{DBC} + \widehat{DCB} = \frac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{ACB})$

Nên $\widehat{DBC} + \widehat{DCB} = \frac{1}{2}(180^0 - \alpha)$

$\widehat{DBC} + \widehat{DCB} = 90^0 - \frac{1}{2}\alpha$

Xét ΔDBC có $\widehat{BDC} + \widehat{DBC} + \widehat{DCB} = 180^0$

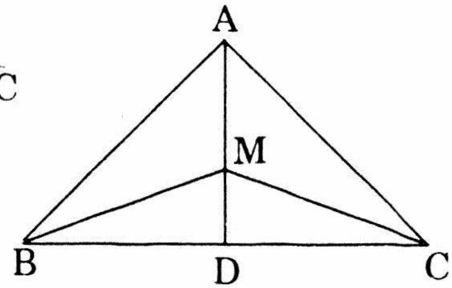
Do đó $\widehat{BDC} = 180^0 - (\widehat{DBC} + \widehat{DCB})$

$= 180^0 - (90^0 - \frac{1}{2}\alpha)$

$= 90^0 + \frac{1}{2}\alpha$

Bài 290. Cho hình vẽ sau. Hãy so sánh:

a) $\widehat{BMD}$ và $\widehat{BAD}$ b) $\widehat{BMC}$ và $\widehat{BAC}$



Giải

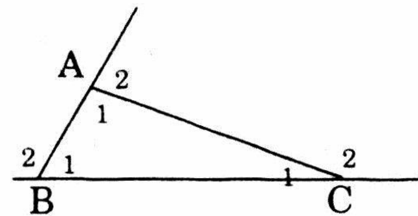
a) $\widehat{BMD} > \widehat{BAD}$ ($\widehat{BMD}$ là góc ngoài của ΔBAM)

b) $\widehat{CMD} > \widehat{CAD}$ ($\widehat{CMD}$ là góc ngoài của ΔCAM)

Do đó $\widehat{BMD} + \widehat{CMD} > \widehat{BAD} + \widehat{CAD}$

$\Rightarrow \widehat{BMC} > \widehat{BAC}$

Bài 291. Biết một góc ngoài của tam giác bằng 120^0, một góc trong không kề với nó bằng 20^0. Tính các góc trong và ngoài còn lại của tam giác.



Giải

Giả sử $\hat{B}_2 = 120^0$ và $\hat{C}_1 = 20^0$

Ta có: $\hat{B}_2 = \hat{C}_1 + \hat{A}_1$

Do đó $\hat{A}_1 = \hat{B}_2 - \hat{C}_1 = 120^0 - 20^0 = 100^0$

$\hat{A}_2 = 180^0 - \hat{A}_1 = 180^0 - 100^0 = 80^0$

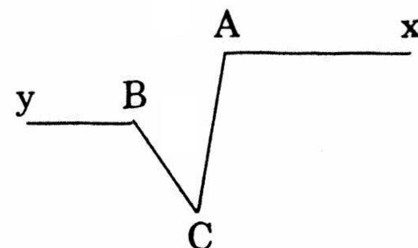
$\hat{B}_1 = 180^0 - \hat{B}_2 = 180^0 - 120^0 = 60^0$

$\hat{C}_2 = 180^0 - \hat{C}_1 = 180^0 - 20^0 = 160^0$

Bài 292. Trên hình bên, cho biết:

$\widehat{xAC} + \widehat{yBC} - \widehat{ACB} = 180^0$

Chứng minh rằng: Ax // Cy



Giải

GT	$\widehat{xAC} + \widehat{yBC} - \widehat{ACB} = 180^0$
KL	Ax // Cy

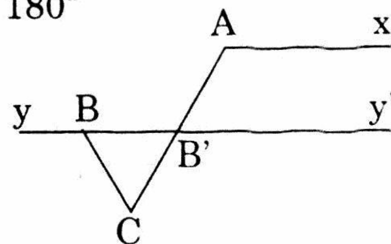
Chứng minh

Vẽ tia By' là tia đối của tia By, gọi B' là giao điểm của tia By' với AC.

Ta có $\widehat{yBC} = \widehat{BB'C} + \widehat{ACB}$ (vì $\widehat{yBC}$ là góc ngoài của ΔBB'C)

Mà $\widehat{xAC} + \widehat{yBC} - \widehat{ACB} = 180^0$ (giả thiết)

Do đó $\widehat{xAC} + (\widehat{BB'C} + \widehat{ACB}) - \widehat{ACB} = 180^0$



$\Rightarrow \widehat{xAB} + \widehat{BB'C} = 180^0$

Mà $\widehat{BB'C} = \widehat{AB'y'}$ (đối đỉnh), do đó

$\widehat{xAC} + \widehat{AB'y'} = 180^0$

Mà $\widehat{xAC}$ và $\widehat{AB'y'}$ là hai góc trong cùng phía, suy ra Ax // By.

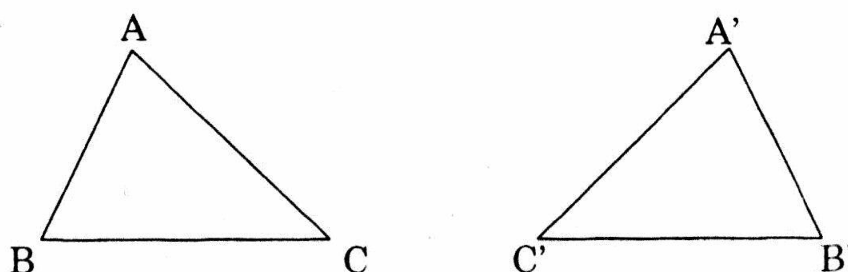
§2. HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa:

ΔABC và ΔA'B'C' có:

AB = A'B'; AC = A'C', BC = B'C', $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$



Hình 60

Hai tam giác ABC và A'B'C' như trên được gọi là hai tam giác bằng nhau.

Hai đỉnh A và A', B và B', C và C' gọi là hai đỉnh tương ứng.

Hai góc A và A', B và B', C và C' gọi là hai góc tương ứng.

Hai cạnh AB và A'B', AC và A'C', BC và B'C' gọi là hai cạnh tương ứng.

Định nghĩa:

Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có các cạnh tương ứng bằng nhau, các góc tương ứng bằng nhau.

2. Kí hiệu

Để kí hiệu bằng nhau của tam giác ABC và tam giác A'B'C' ta viết $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.

Người ta quy ước rằng khi kí hiệu sự bằng nhau của hai tam giác, các chữ cái chỉ tên các đỉnh tương ứng được viết theo cùng thứ tự.

$$\Delta ABC = \Delta A'B'C' \text{ nếu } \begin{cases} AB = A'B',\ AC = A'C',\ BC = B'C' \\ \hat{A} = \hat{A}',\quad \hat{B} = \hat{B}',\quad \hat{C} = \hat{C}'. \end{cases}$$

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 293. Cho $\Delta ABC = \Delta DEF$, trong đó AB = 6,5cm, $\hat{D} = 70^0$, AC = 8cm. Tính DE, $\hat{A}$, DF.

Giải

$\Delta ABC = \Delta DEF$ (gt) $\Rightarrow$ AB = DE, AC = DF, BC = EF

Và $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$

Mà AB = 6,5cm, $\hat{D} = 70^0$, AC = 8cm (gt)

Nên DE = 6,5cm, $\hat{A} = 70^0$, DF = 8cm.

Bài 294. Cho hai tam giác bằng nhau ABC và DEG.

a) Biết $\hat{A} = 50^0$, $\hat{C} = 60^0$ và $\hat{E} = 70^0$. Tìm số đo các góc còn lại của mỗi tam giác.

b) Biết DG = 8cm. Có thể tìm được độ dài của cạnh nào của tam giác ABC?

Giải

a) Vì $\Delta ABC = \Delta DEG$ nên:

$\hat{A} = \hat{D} = 50^0$; $\hat{B} = \hat{E} = 70^0$; $\hat{C} = \hat{G} = 60^0$

b) Dễ thấy AC = DG = 8cm. Vậy có thể tìm được độ dài của cạnh AC = 8cm.

Bài 295. Cho $\Delta ABC = \Delta DEF$, $\Delta DEF = \Delta MNP$. Chứng minh rằng:

$\hat{A} = \hat{M}$, $\hat{B} = \hat{N}$, $\hat{C} = \hat{P}$, AB = MN, AC = MP, BC = NP.

Giải

Ta có: $\Delta ABC = \Delta DEF$ (gt)

$\Rightarrow$ AB = DE, AC = DF, BC = EF

$\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$ (1)

và $\Delta DEF = \Delta MNP$ (gt)

$\Rightarrow$ DE = MN, DF = MP, EF = NP

và $\hat{D} = \hat{M}$, $\hat{E} = \hat{N}$, $\hat{F} = \hat{P}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

AB = MN, AC = MP, BC = NP

$\hat{A} = \hat{M}$, $\hat{B} = \hat{N}$, $\hat{C} = \hat{P}$.

§3. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ NHẤT CỦA TAM GIÁC CẠNH – CẠNH – CẠNH (C.C.C)

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 296. Cho các hình bên. Chứng minh rằng: $\Delta ABC = \Delta ABD$; $\Delta MQP = \Delta QMN$.

Giải

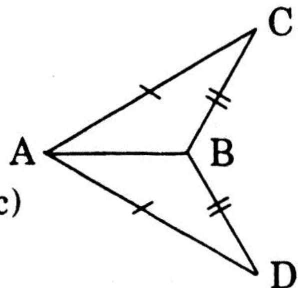
Xét ΔABC và ΔABD có:

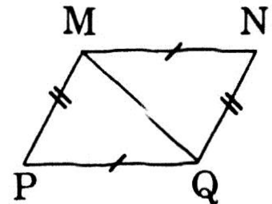
AC = AD (gt)

BC = BD (gt)

AB (cạnh chung)

Do đó $\Delta ABC = \Delta ABD$ (c.c.c)





Xét ΔMQP và ΔQMN có:

MP = QN (gt)

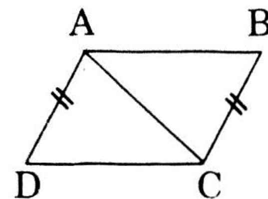
QP = MN (gt)

MQ (cạnh chung)

Do đó $\Delta MQP = \Delta QMN$ (c.c.c)

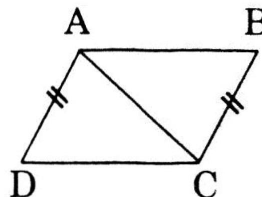
Bài 297. Trên hình bên cho biết AB = DC, AD = BC.

Chứng minh rằng: AB // DC, AD // BC.



Giải

GT	AB = DC AD = BC
KL	AB // DC AD // BC



Chứng minh

Xét ΔABC và CDA có:

AB = CD (gt), AC (cạnh chung), BC = AD (gt)

Do đó ΔABC = ΔCDA (c.c.c)

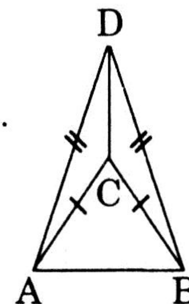
Suy ra $\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$ và $\widehat{ACB} = \widehat{DAC}$ (hai góc tương ứng)

Ta có $\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$ mà $\widehat{BAC}$ và $\widehat{ACD}$ so le trong nên AB // DC.

Mặt khác $\widehat{ACB} = \widehat{DAC}$ mà $\widehat{ACB}$ và $\widehat{DAC}$ so le trong nên AD // BC.

Bài 298. Hình bên cho biết: DA = DB, CA = CB

Chứng minh rằng: DC là tia phân giác của góc ADB.



Giải

Xét ΔACD và ΔBCD có:

DA = DB (gt), CA = CB (gt), DC là cạnh chung.

Do vậy: ΔACD = ΔBCD (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{BDC}$ (hai góc tương ứng)

Do đó DC là tia phân giác của góc ADB.

Bài 299. Cho tam giác ABC có AB = AC, M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{BAM} = \widehat{CAM}$

b) AM ⊥ BC

Giải

a) Xét ΔBAM và ΔCAM có:

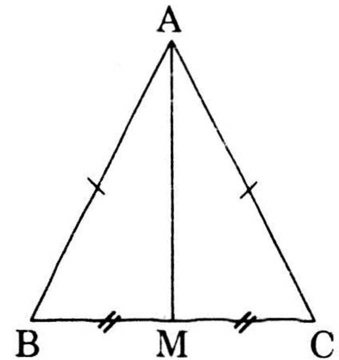
AB = AC (gt)

AM là cạnh chung

BM = CM (vì M là trung điểm cạnh BC).

Do đó $\Delta BAM = \Delta CAM$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAM}$ (hai góc tương ứng)



b) Vì $\Delta BAM = \Delta CAM$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC}$

Mà $\widehat{AMB} + \widehat{AMC} = 180^0$ (hai góc kề bù)

Nên $\widehat{AMB} + \widehat{AMB} = 180^0$

$2\widehat{AMB} = 180^0$

$\widehat{AMB} = 90^0$

Do đó $AM \perp BC$

§4. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ HAI CỦA TAM GIÁC CẠNH – GÓC – CẠNH (C.G.C)

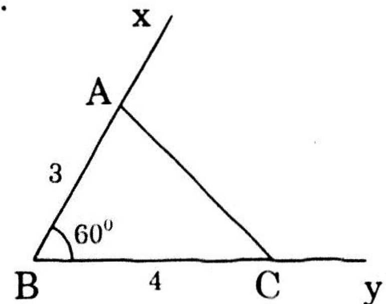
A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Vẽ tam giác biết hai cạnh và góc xen giữa:

Bài toán: Vẽ tam giác ABC biết:

$AB = 3cm$, $BC = 4cm$, $\widehat{B} = 60^0$

Giải



– Vẽ góc $\widehat{xBy} = 60^0$

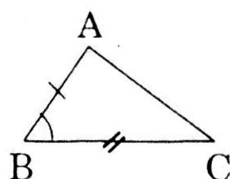
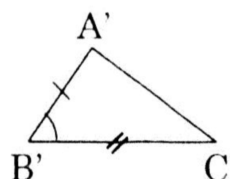
– Trên tia Bx lấy điểm A sao cho BA = 3cm

– Trên tia By lấy điểm C sao cho BC = 4cm.

– Vẽ đoạn thẳng AC, ta được tam giác ABC.

2. Trường hợp bằng nhau cạnh – góc – cạnh:

Tính chất: Nếu hai cạnh và góc xen giữa của hai tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của hai tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

GT	ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có: $AB = A'B'$ $\hat{B} = \hat{B'}$ $BC = BC$	 
KL	$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$	

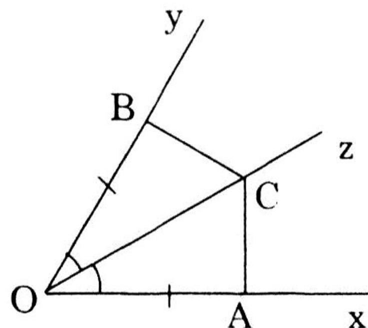
3. *Hệ quả:* Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này lần lượt bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 300. Cho góc $\widehat{xOy}$ khác góc bẹt, Oz là tia phân giác. Trên tia Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A, B, C sao cho OA = OB.

Chứng minh rằng $\Delta OAC = \Delta OBC$.

Giải



GT	Oz là tia phân giác góc $\widehat{xOy}$, OA = OB
KL	$\Delta OAC = \Delta OBC$

Chứng minh:

Xét ΔOAC và ΔOBC có:

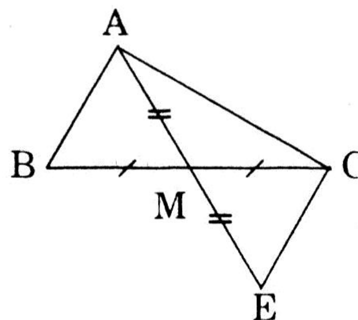
OA = OB (gt), $\widehat{AOC} = \widehat{BOC}$

(Oz là tia phân giác góc xOy); OC (cạnh chung)

Do đó $\Delta OAC = \Delta OBC$ (c.g.c)

Bài 301. Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho ME = MA. Chứng minh rằng AB // CE.

Giải



GT	ΔABC MB = MC AM = ME
KL	AB // CE

Chứng minh:

Xét ΔMAB và ΔMEC có:

MB = MC (giả thiết)

$\widehat{AMB} = \widehat{EMC}$ (hai góc đối đỉnh)

MA = ME (giả thiết)

Do đó $\Delta MAB = \Delta MEC$ (c.g.c)

Suy ra: $\widehat{MAB} = \widehat{MEC}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{MAB}$ và $\widehat{MEC}$ là một cặp góc so le trong.

Do đó AB // CE (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song).

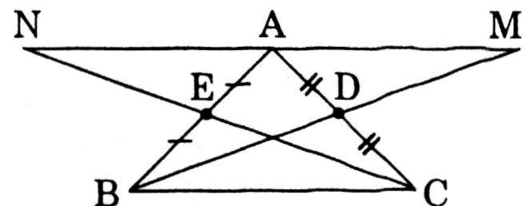
Bài 302. Cho tam giác ABC. Gọi E, D lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC. Trên tia đối của tia DB lấy điểm M sao cho DM = DB. Trên tia đối của tia EC lấy điểm N sao cho EN = EC. Chứng minh rằng:

a) AM // BC;

b) Ba điểm M, A, N thẳng hàng.

Giải

GT	EA = EB, DA = DC EC = EN, DM = DB
KL	a) AM // BC b) M, A, N thẳng hàng



a) Xét ΔADM và ΔCDB có:

AD = CD (vì D là trung điểm của cạnh AC)

$\widehat{ADM} = \widehat{CDB}$ (hai góc đối đỉnh)

DM = DB (gt)

Do đó: $\Delta ADM = \Delta CDB$ (c.g.c)

$\Rightarrow$ $\widehat{AMD} = \widehat{CBD}$ (hai góc tương ứng)

mà $\widehat{AMD}$ và $\widehat{CBD}$ là một cặp góc so le trong.

Do đó AM // BC

b) Xét ΔEAN và ΔBEC có:

EA = EB (Vì E là trung điểm của cạnh AB)

$\widehat{AEN} = \widehat{BEC}$ (hai góc đối đỉnh)

EN = EC (gt)

Do đó: $\Delta AEN = \Delta BEC$ (c.g.c)

$\Rightarrow$ $\widehat{ANE} = \widehat{BCE}$ (hai góc tương ứng)

mà $\widehat{ANE}$ và $\widehat{BCE}$ là một cặp góc so le trong.

Do đó AN // BC.

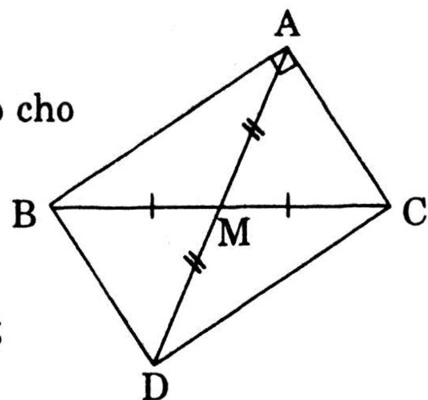
Ta có qua A ta vẽ hai đường thẳng AM và AN cùng song song với BC nên hai đường thẳng AM và AN trùng nhau. (Tiên đề Ơ–clít).

Do vậy ba điểm M, A, N thẳng hàng.

Bài 303. Cho tam giác ABC vuông tại A, M là trung điểm cạnh BC. Chứng minh rằng $AM = \frac{1}{2}BC$.

Giải

GT	ΔABC ($\widehat{A} = 90^0$) M là trung điểm cạnh BC
KL	$AM = \frac{1}{2}BC$



Chứng minh:

Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho

MD = MA.

Xét ΔMAC và ΔMDB có:

MA = MD, $\widehat{AMC} = \widehat{DMB}$ (đối đỉnh);

MC = MB (giả thiết)

Do đó $\Delta MAC = \Delta MDB$ (c.g.c)

$\Rightarrow$ AC = DB (hai cạnh tương ứng), $\widehat{MAC} = \widehat{MDB}$ (hai góc tương ứng)

$\widehat{MAC} = \widehat{MDB}$, $\widehat{MAC}$ và $\widehat{MDB}$ là hai góc so le trong nên AC // DB.

Ta có AC // DB, AC $\perp$ AB $\Rightarrow$ BD $\perp$ AB.

$\Rightarrow \quad \widehat{DBA} = 90^0$.

Xét ΔABC và ΔBAD có:

AC = BD; $\widehat{BAC} = \widehat{ABD}$ (= 90^0); AB (cạnh chung)

Do đó ΔABC = ΔBAD (c.g.c) nên BC = AD (hai cạnh tương ứng)

Mà $\quad AM = \frac{1}{2}AD$

Do đó $\quad AM = \frac{1}{2}BC$.

Bài 304. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} < 90^0$. Trên nửa mặt bờ AB không chứa điểm C vẽ tia Ax vuông góc với AB, trên tia Ax lấy điểm D sao cho AD = AB. Trên nửa mặt bờ AC không chứa điểm B vẽ tia Ay vuông góc với AC, trên tia Ay lấy điểm E sao cho AE = AC.

Gọi M là trung điểm cạnh BC.

Chứng minh rằng $AM = \frac{1}{2}DE$.

Giải

GT	ΔABC; AD $\perp$ AB AD = AB; AC $\perp$ AE AC = AE M là trung điểm cạnh BC
KL	$AM = \frac{1}{2}DE$

Chứng minh:

Trên tia đối của tia MA lấy điểm N sao cho MN = MA.

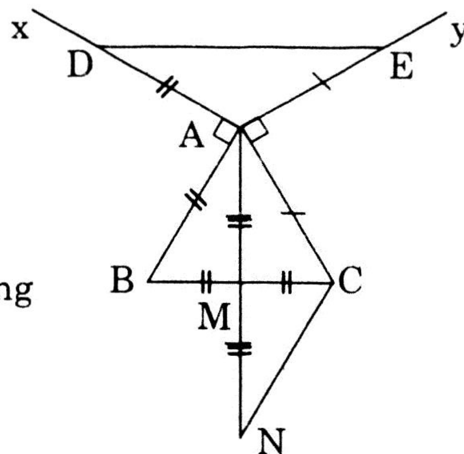
Xét ΔMAB và ΔMNC có MA = MN,

$\widehat{BMA} = \widehat{NMC}$ (đối đỉnh), MB = MC (M là trung điểm cạnh BC)

Do đó $\Delta MAB = \Delta MNC$ (c.g.c)

Suy ra $\widehat{BAM} = \widehat{MNC}$ và AB = CN

$\widehat{BAM} = \widehat{MNC}$, $\widehat{BAM}$ và $\widehat{MNC}$ so le trong $\Rightarrow$ AB // CN.



Mà $\widehat{BAC}$ và $\widehat{ACN}$ là hai góc trong cùng phía nên $\widehat{BAC} + \widehat{ACN} = 180^0$

Ta có: $\widehat{BAC} + \widehat{DAE} = 180^0$

Suy ra $\widehat{ACN} = \widehat{DAE}$

Xét ΔCAN và ΔAED có:

CA = AE (giả thiết), $\widehat{ACN} = \widehat{DAE}$, CN = AD (= AB)

Do đó $\Delta CAN = \Delta AED$ (c.g.c)

Suy ra AN = DE, mà $AM = \frac{1}{2}AN$, do đó $AM = \frac{1}{2}DE$

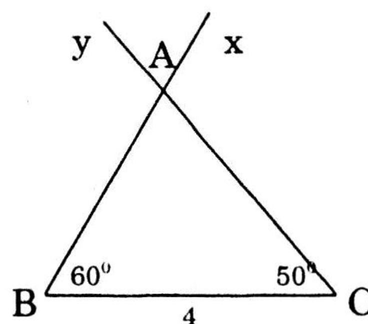
§5. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ BA CỦA TAM GIÁC GÓC – CẠNH – GÓC (G.C.G)

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Vẽ tam giác biết một cạnh và hai góc kề:

Bài toán: Vẽ tam giác ABC biết: BC = 4cm, $\widehat{B} = 60^0$, $\widehat{C} = 50^0$.

Giải



– Vẽ đường thẳng BC = 4cm.

– Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ BC, vẽ hai tia Bx và Cy sao cho: $\widehat{CBx} = 60^0$, $\widehat{BCy} = 50^0$

Hai tia trên cắt nhau tại A, ta được tam giác ABC.

2. Trường hợp bằng nhau góc – cạnh – góc:

Tính chất:

Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

GT	ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có: $\hat{B} = \hat{B}'$ $BC = B'C'$ $\hat{C} = \hat{C}'$
KL	$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$

3. Hệ quả:

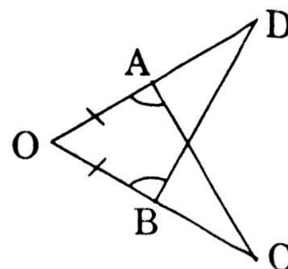
Hệ quả 1:

Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

Hệ quả 2:

Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

B/ CÁC BÀI TOÁN



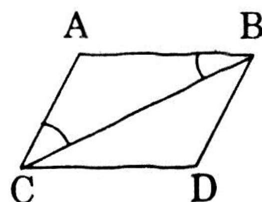
Bài 305. Cho hình bên ta có OA = OB, $\widehat{OAC} = \widehat{OBD}$. Chứng minh rằng $\Delta OAC = \Delta OBD$.

Giải

Xét ΔOAC và ΔOBD có:

$\widehat{OAC} = \widehat{OBD}$ (gt); OA = OB (gt); $\widehat{AOC}$ (góc chung).

Do đó $\Delta OAC = \Delta OBD$ (g.c.g)



Bài 306. Cho hình bên có AB // CD, AC // BD. Chứng minh rằng AB = CD, AC = BD.

Giải

Xét ΔABC và ΔDCB có:

$\widehat{ABC} = \widehat{DCB}$ (so le trong và AB // CD)

BC (cạnh chung)

$\widehat{ACB} = \widehat{DBC}$ (so le trong và AC // BD)

Do đó $\Delta ABC = \Delta DCB$ (g.c.g)

Suy ra AB = CD, AC = BD (hai cạnh tương ứng)

Bài 307. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 60^0$. Hai tia phân giác AD và CE của các góc $\widehat{BAC}$ và $\widehat{ACB}$ ($D \in BC$, $E \in AB$) cắt nhau ở I.

Chứng minh rằng ID = IE.

Giải

GT	ΔABC ($\hat{B} = 60^0$); AD; CE lần lượt là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$, $\widehat{ACB}$
KL	ID = IE

Chứng minh

Xét ΔABC có $\widehat{ABC} = 60^0$

$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = 180^0 - \widehat{ABC} = 120^0$

AI là tia phân giác $\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{IAC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$

CI là tia phân giác $\widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{ICA} = \frac{1}{2}\widehat{ACB}$

Suy ra $\widehat{IAC} + \widehat{ICA} = \frac{1}{2}(\widehat{BAC} + \widehat{ACB}) = 60^0$.

ΔAIC có $\widehat{AIC} = 180^0 - (\widehat{IAC} + \widehat{ICA}) = 120^0$

Do đó $\widehat{AIE} = \widehat{DIC} = 180^0 - 120^0 = 60^0$

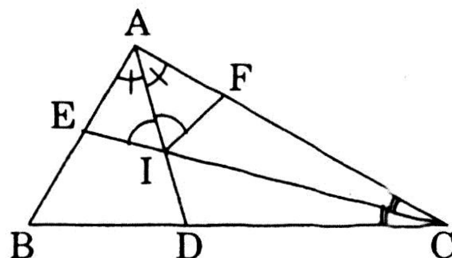
Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho AF = AE.

Xét ΔIAE và ΔIAF có AE = AF; $\widehat{EAI} = \widehat{FAI}$, (AI là tia phân giác $\widehat{BAC}$)

AI (chung).

$\Rightarrow$ IE = IF (hai cạnh tương ứng)

$\widehat{AIE} = \widehat{AIF} = 60^0$



Ta có $\widehat{FIC} = \widehat{AIC} - \widehat{AIF} = 60^0$

Xét ΔDIC và ΔFIC có:

$\widehat{DIC} = \widehat{FIC}$ ($= 60^0$); IC (chung);

$\widehat{ICD} = \widehat{ICF}$

Do đó $\Delta DIC = \Delta FIC$ (g.c.g)

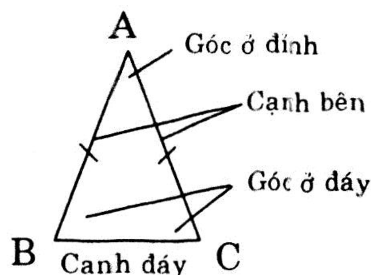
Suy ra ID = IF (hai cạnh tương ứng)

Ta có IE = IF và ID = IF

Suy ra IE = ID

§6. TAM GIÁC CÂN

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT



1. Định nghĩa:

Tam giác cân là tam giác có hai cạnh bằng nhau.

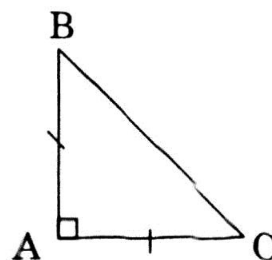
2. Tính chất:

Định lí 1: Trong một tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau.

Định lí 2: Nếu một tam giác có hai góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

Định nghĩa:

Tam giác vuông cân là tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau. (hình bên).

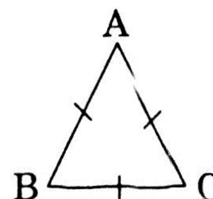


3. Tam giác đều

Định nghĩa:

Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau.

Các hệ quả:



– Trong tam giác đều, mỗi góc bằng 60^0.

– Nếu một tam giác có ba góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.

– Nếu một tam giác cân có một góc bằng 60^0 thì tam giác đó là tam giác đều.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 308. a) Tính các góc ở đáy của một tam giác cân biết góc ở đỉnh bằng 70^0.

b) Tính góc ở đỉnh của một tam giác cân biết góc ở đáy bằng 70^0.

Giải

Tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau.

a) Gọi góc ở đáy là x, ta có:

$70^0 + x + x = 180^0$

$70^0 + 2x = 180^0$

$2x = 180^0 - 70^0$

$x = 110^0 : 2$

$x = 55^0$

b) Gọi góc ở đỉnh là y, ta có:

$70^0 + 70^0 + y = 180^0$

$140^0 + y = 180^0$

$y = 180^0 - 140^0$

$y = 40^0$

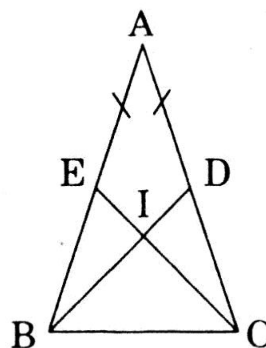
Bài 309. Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm D thuộc cạnh AC, điểm E thuộc cạnh AB sao cho AD = AE.

a) Chứng minh rằng: $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$

b) Gọi I là giao điểm của BD và CE. Chứng minh tam giác IBC cân.

Giải

GT	ΔABC cân tại A AD = AE
KL	a) $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$ b) ΔIBC cân



a) Xét ΔABD và ΔACE có:

AB = AC (ΔABC cân tại A)

$\widehat{BAD}$ (góc chung); AD = AE (gt).

Do đó $\Delta ABD = \Delta ACE$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ACE}$ (hai góc tương ứng)

b) $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (ΔABC cân tại A)

Do đó $\widehat{ABC} - \widehat{ABD} = \widehat{ACB} - \widehat{ACE}$

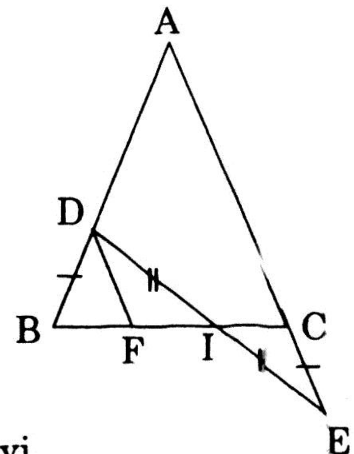
$\Rightarrow \widehat{IBC} = \widehat{ICB} \Rightarrow \Delta IBC$ cân tại I.

Bài 310. Cho tam giác ABC cân đỉnh A. Trên cạnh AB lấy điểm D, trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho BD = CE. Nối D với E.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng DE.

Chứng minh rằng ba điểm B, I, C thẳng hàng.

Giải



GT	ΔABC cân (AB = AC) BD = CE, I là trung đểm của DE
KL	B, I, C thẳng hàng

Chứng minh:

Vẽ DF // AC ($F \in BC$), $\widehat{DFB}$ và $\widehat{ACB}$ đồng vị

$\Rightarrow \widehat{DFB} = \widehat{ACB}$

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (ΔABC cân đỉnh A)

Suy ra $\widehat{DFB} = \widehat{ABC}$

$\Rightarrow \Delta DBF$ cân đỉnh D $\Rightarrow$ DB = DF.

Xét ΔDIF và ΔEIC có:

DI = IE (giả thiết); $\widehat{FDI} = \widehat{CEI}$ ($\widehat{FDI}$ và $\widehat{CEI}$ so le trong, DF // AC)

DF = CE (= BD)

Do đó $\Delta DIF = \Delta EIC$ (c.g.c)

Suy ra $\widehat{DIF} = \widehat{EIC}$

Mà $\widehat{DIF} + \widehat{EIF} = 180^0$

Do đó $\widehat{EIC} + \widehat{EIF} = 180^0$

$\Rightarrow$ F, I, C thẳng hàng $\Rightarrow$ B, I, C thẳng hàng.

Bài 311. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 20^0$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho AD = BC. Tính số đo góc $\widehat{ACD}$.

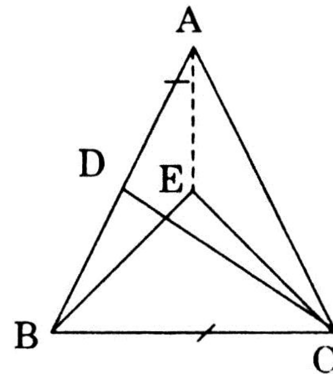
Giải

Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A, ta vẽ điểm E sao cho ΔBEC đều.

Xét ΔABE và ΔACE có:

AB = AC (ΔABC cân tại A)

BE = CE (ΔBEC đều)



AE (cạnh chung)

Do đó ΔABE = ΔACE (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{CAE} = 10^0$

Xét ΔECA và ΔDAC có:

CE = AD (= BC)

$\widehat{ECA} = \widehat{DAC}$ (= 20^0, suy từ gt)

AC (cạnh chung)

Do đó ΔECA = ΔDAC (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{CAE} = 10^0$

Bài 312. Cho tam giác ABC cân tại A có:

$$\widehat{BAC} = 40^0,\ AH \perp BC\ (H \in BC)$$

Các điểm E, F theo thứ tự thuộc các đoạn thẳng AH, AC sao cho $\widehat{EBA} = \widehat{FBC} = 30^0$. Chứng minh rằng: AE = AF.

Giải

Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C, vẽ điểm D sao cho ΔABD đều.

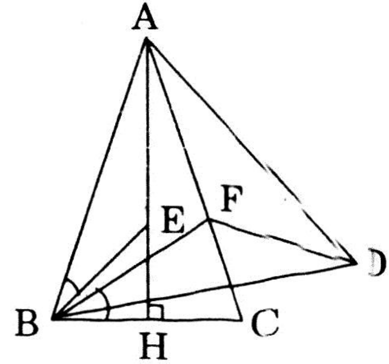
Ta có ΔABC cân tại A, $\widehat{BAC} = 40^0$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = (180^0 - 40^0) : 2 = 70^0$

Do đó $\widehat{ABF} = \widehat{ABC} - \widehat{FBC} = 70^0 - 30^0 = 40^0$

Nên $\widehat{ABF} = \widehat{BAF}$

$\Rightarrow \Delta AFB$ cân tại F $\Rightarrow$ FA = FB



Xét ΔADF và ΔBDF có:

FA = FB, AD = BD (ΔABD đều)

DF (cạnh chung)

Do đó: $\Delta ADF = \Delta BDF$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{FDA} = \widehat{FDB}$

Mà $\widehat{ADB} = \widehat{FDA} + \widehat{FDB}$

$\widehat{ADB} = 60^0$ (vì ΔABD đều) $\Rightarrow \widehat{FDB} = 30^0$

Nên $\widehat{FDB} = \widehat{EBA}$ $(= 30^0)$ (1)

ΔABC cân tại A (gt), $\widehat{AHB} = 90^0$, $\widehat{ABH} = 70^0$

$\Rightarrow \widehat{BAE} = 20^0$.

Ta có: $\widehat{DAF} = \widehat{DAB} - \widehat{FAB} = 60^0 - 40^0 = 20^0$

$\Rightarrow \widehat{DAF} = \widehat{BAE}$ (2)

Vì ΔABD đều $\Rightarrow$ AD = AB (3)

Do đó $\Delta ADF = \Delta BAE$ (g.c.g) (căn cứ vào (1), (2) và (3))

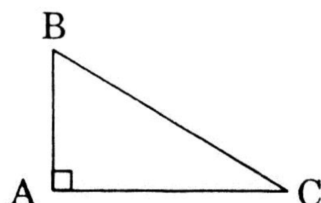
$\Rightarrow$ AE = AF.

§7. ĐỊNH LÍ PY-TA-GO

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định lí Py–ta–go:

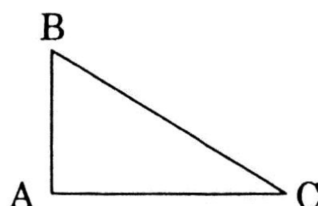
Trong một tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng các bình phương của hai cạnh góc vuông.



$$\Delta ABC \text{ vuông tại } A \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$$

2. Định lí Py–ta–go đảo:

Nếu một tam giác có bình phương của một cạnh bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia thì tam giác đó là tam giác vuông.



$$\Delta ABC \text{ có } BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0$$

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 313. Tìm độ dài cạnh huyền (x) trong các tam giác biết độ dài hai cạnh góc vuông là:

a) 4cm; 3cm

b) 7cm; 5cm

c) 3cm; $\sqrt{40}$ cm

d) 5cm; 6cm.

Giải

Áp dụng định lí Py–ta–go để tính độ dài cạnh huyền (x):

a) $x^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow x = 5$cm

b) $x^2 = 7^2 + 5^2 = 49 + 25 = 74 \Rightarrow x = \sqrt{74}$ cm

c) $x^2 = 3^2 + (\sqrt{40})^2 = 9 + 40 = 49 \Rightarrow x = 7cm$

d) $x^2 = 5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61 \Rightarrow x = \sqrt{61}$ cm

Bài 314. Tính chiều cao của bức tường biết rằng chiều dài của thanh là 4m và chân thang cách tường là 1m.

Giải

Gọi chiều cao của bức tường là x(m)

Áp dụng định lí Py–ta–go, ta có:

$1^2 + x^2 = 4^2 \Rightarrow x^2 = 16 - 1 = 15$

$x = \sqrt{15}$ (cm)

Bài 315. Cho hình vẽ sau: Tính độ dài cạnh AC.

Giải

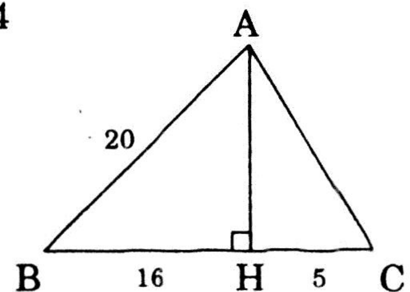
ΔHAB vuông tại H (gt), theo định lí Py–ta–go ta có:

$AH^2 + BH^2 = AB^2$

Mà AB = 20 (gt), BH = 16 (gt)

Do đó $AH^2 = 20^2 - 16^2 = 400 - 256 = 144$

$\Rightarrow AH = \sqrt{144} = 12$



ΔHAC vuông tại H (gt), theo định lí Py–ta–go ta có

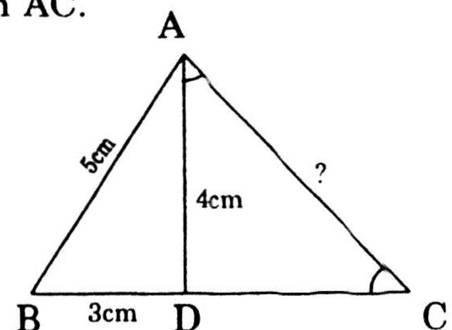
$AH^2 + HC^2 = AC^2$

Mà AH = 12, HC = 5 (gt)

Do đó $AC^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$

$\Rightarrow AC = \sqrt{169} = 13$

Bài 316. Cho hình vẽ sau: Tính độ dài cạnh AC.



Giải

Ta có $\widehat{DAC} = \widehat{DCA}$ (gt)

$\Rightarrow \Delta$DAC cân tại D

$\Rightarrow$ DC = DA mà DA = 4cm (gt)

Do vậy DC = 4cm.

Mặt khác, ta có $AD^2 + BD^2 = 4^2 + 3^2 = 25$

Và $AB^2 = 5^2 = 25$

ΔADB có $AD^2 + BD^2 = AB^2$ (= 25)

nên ΔADB vuông tại D (định lí Py–ta–go)

$\Rightarrow \quad \widehat{ADC} = 90^0$

ΔADC vuông tại D, theo định lí Pi–ta–go ta có:

$$AC^2 = DA^2 + DC^2$$

$$AC^2 = 4^2 + 4^2$$

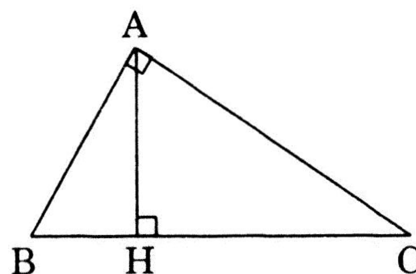
$$AC^2 = 32$$

$$AC = \sqrt{32}\,(cm)$$

Bài 317. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ AH ⊥ BC tại H. Chứng minh rằng.

$$2AH^2 + BH^2 + CH^2 = BC^2$$

Giải



ΔABH vuông tại H, theo định lí Py–ta–go có:

$$AH^2 + BH^2 = AB^2$$

ΔACH vuông tại H, theo định lí Py–ta–go có:

$$AH^2 + CH^2 = AC^2$$

Do đó $AH^2 + BH^2 + AH^2 + CH^2 = AB^2 + AC^2$

$\Rightarrow \quad 2AH^2 + BH^2 + CH^2 = AB^2 + AC^2 \qquad (1)$

Mặt khác ΔABC vuông tại A, theo định lí Py–ta–go có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

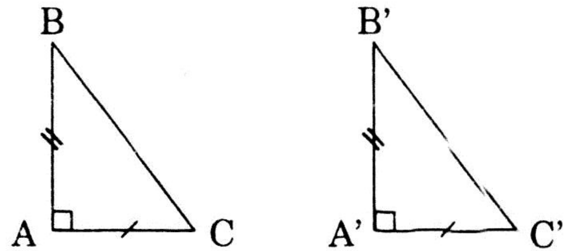
$$2AH^2 + BH^2 + CH^2 = BC^2$$

§8. CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC VUÔNG.

A/ TÓM TẮT LÝ THUYẾT

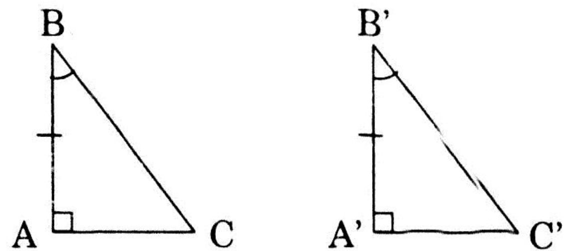
1. Các trường hợp bằng nhau đã biết của hai tam giác vuông:

a) Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này lần lượt bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau (c.g.c), (h.a).



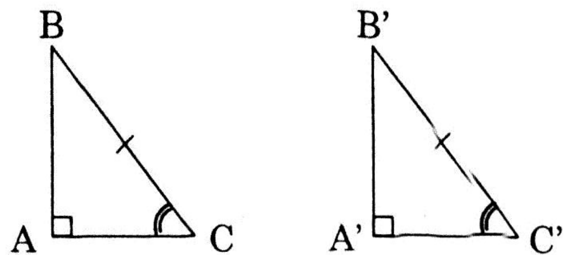
Hình a

b) Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì tam giác vuông đó bằng nhau (g.c.g), (h.b).



Hình b

c) Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau (g.c.g), (h.c).



Hình c

2. Trường hợp bằng nhau về cạnh huyền và cạnh góc vuông:

Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

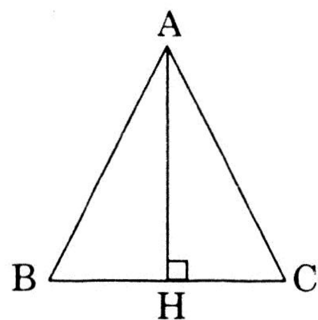
B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 318. Cho tam giác ABC cân tại A. Vẽ AH ⊥ BC tại H. Chứng minh rằng:

a) HB = HC

b) $\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$

Giải



a) Xét Δ AHB ($\widehat{AHB} = 90^0$) và Δ AHC

($\widehat{AHC} = 90^0$) có:

AB = AC (Δ ABC cân tại A);

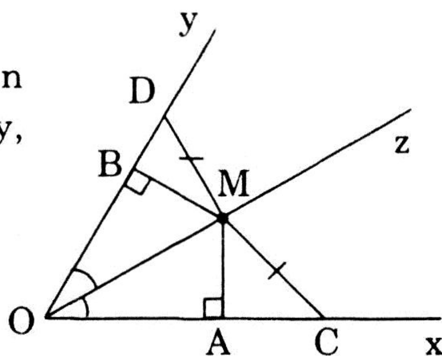
AH (cạnh chung).

Do đó Δ AHB = Δ AHC (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

⇒ HB = HC.

b) ΔHAB = Δ HAC ⇒ $\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$.

Bài 319. Cho hình bên, có Oz là tia phân giác góc xOy, MA ⊥ Ox, MB ⊥ Oy, MC = MD. Chứng minh rằng:



a) MA = MB.

b) $\widehat{ACM} = \widehat{BDM}$

Giải

a) Xét Δ AOM ($\widehat{OAM} = 90^0$) và Δ BOM ($\widehat{OBM} = 90^0$) có OM (cạnh chung); $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$ (Oz là tia phân giác)

Do đó Δ AOM = Δ BOM (cạnh huyền – góc nhọn)

MA = MB (hai cạnh tương ứng).

b) Xét Δ AMC ($\widehat{MAC} = 90^0$) và ΔBMD ($\widehat{MBD} = 90^0$) có:

MC = MD (gt), MA = MB (câu a)

Do đó Δ AMC = Δ BMD (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

⇒ $\widehat{ACM} = \widehat{BDM}$ (hai góc tương ứng).

Bài 320. Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{A} < 90^0$). Vẽ BH ⊥ AC (H ∈ AC), CK ⊥ AB (K ∈ AB).

a) Chứng minh rằng AH = AK.

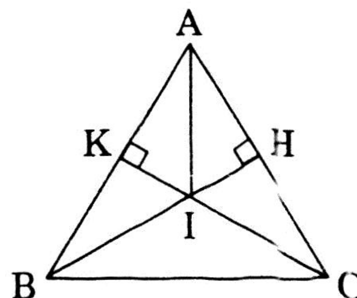
b) Gọi I là giao điểm của BH và CK. Chứng minh rằng AI là tia phân giác của góc A.

Giải

a) ΔABC cân tại A $\Rightarrow$ AB = AC.

Xét ΔHAB ($\widehat{AHB} = 90^0$) và ΔKAC ($\widehat{AKC} = 90^0$) có:

$\widehat{HAB}$ (góc chung), AB = AC.



Do đó $\Delta HAB = \Delta KAC$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow$ AH = AK.

b) Xét ΔAKI ($\widehat{AKI} = 90^0$) và Δ AHI ($\widehat{AHI} = 90^0$) có:

AK = AH, AI (cạnh chung).

Do đó $\Delta AKI = \Delta AHI$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow$ $\widehat{KAI} = \widehat{HAI}$

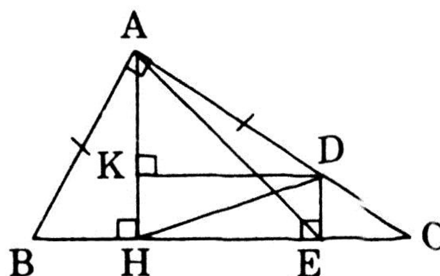
Vậy AI là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

Bài 321. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB < AC. Vẽ AH vuông góc với BC (H $\in$ BC), D là điểm trên cạnh AC sao cho AD = AB. Vẽ DE vuông góc với BC (E $\in$ BC). Chứng minh rằng ΔHAE vuông cân.

Giải

Vẽ DK $\perp$ AH tại K

Xét ΔHAB ($\widehat{AHB} = 90^0$) và ΔKDA ($\widehat{DKA} = 90^0$) có:



AB = AD (giả thiết), $\widehat{BAH} = \widehat{ADK}$ (vì cùng phụ với góc $\widehat{KAD}$)

Do đó $\Delta HAB = \Delta KDA$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow$ HA = KD

KD $\perp$ AH và EH $\perp$ AH $\Rightarrow$ KD // EH $\Rightarrow$ $\widehat{KDH} = \widehat{EHD}$

Xét ΔKDH ($\widehat{DKH} = 90^0$) và ΔEHD ($\widehat{HED} = 90^0$) có:

DH (cạnh chung), $\widehat{KDH} = \widehat{EHD}$ (chứng minh trên)

Do đó $\Delta KDH = \Delta EHD$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow$ KD = HE

Ta có HA = KD, KD = HE

$\Rightarrow$ HA = HE

ΔHAE vuông tại H có HA = HE nên là tam giác vuông cân.

Bài 322. Cho tam giác ABC, vẽ AH $\perp$ BC (H $\in$ BC). Trên nửa mặt phẳng bờ AH có chứa điểm B dựng AD $\perp$ AB sao cho AD = AB. Trên nửa mặt phẳng còn lại dựng AE $\perp$ AC sao cho AE = AC. Nối D và E, AH cắt DE ở M. Chứng minh rằng M là trung điểm của đoạn thẳng DE.

Giải

Vẽ DK $\perp$ AH tại K, EL $\perp$ AH tại L.

Xét ΔHAB ($\widehat{H} = 90^0$) và ΔKDA ($\widehat{K} = 90^0$) có:

AB = AD (giả thiết),

$\widehat{HAB} = \widehat{KDA}$ (hai góc cùng phụ với $\widehat{DAK}$)

Do đó $\Delta HAB = \Delta KDA$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra HA = DK (1)

Tương tự ta cũng chứng minh được

$\Delta HAC = \Delta LEA$

Suy ra HA = EL (2)

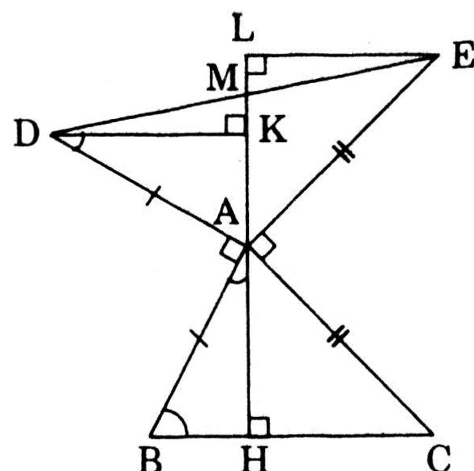
Từ (1) và (2) suy ra DK = EL.

Biết DK $\perp$ AH (gt), EL $\perp$ AH

$\Rightarrow$ DK // EL

$\Rightarrow$ $\widehat{KDM} = \widehat{LEM}$.

Xét ΔKDM và ΔLEM có:



$\widehat{KDM} = \widehat{LEM}$, DK = EL,

$\widehat{DKM} = \widehat{ELM}$ (= 90^0)

Do đó $\Delta KDM = \Delta LEM$ (g.c.g)

$\Rightarrow$ MD = ME.

Mặt khác M nằm giữa D và E, do đó M là trung điểm của đoạn thẳng DE.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

Bài 323. Cho tam giác ABC vuông tại AD là trung điểm trên cạnh AC. Vẽ DE ⊥ BC tại E. Chứng minh rằng $\widehat{ABE} + \widehat{ADE} = 180^0$.

Hướng dẫn

$\widehat{ADE} = \widehat{DEC} + \hat{C} = 90^0 + \hat{C}$ ($\widehat{ADE}$ là góc ngoài của ΔDEC).

Bài 324. Cho tam giác ABC có các góc A, B, C tỉ lệ với 3, 4, 5. Tính các góc của tam giác ABC.

Hướng dẫn

$$\frac{\hat{A}}{3} = \frac{\hat{B}}{4} = \frac{\hat{C}}{5} = \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}{3 + 4 + 5} = \frac{180^0}{12} = 15^0.$$

Bài 325. Cho tam giác ABC có $\hat{B} < \hat{C}$. Tia phân giác góc $\widehat{BAC}$ cắt BC ở D. So sánh $\widehat{ADB}$ và $\widehat{ADC}$.

Hướng dẫn

$\widehat{ADB} > \widehat{ADC}$.

Bài 326. Cho tam giác ABC. D là điểm nằm trong tam giác ABC. Chứng minh rằng $\widehat{BDC} > \widehat{BAC}$.

Hướng dẫn

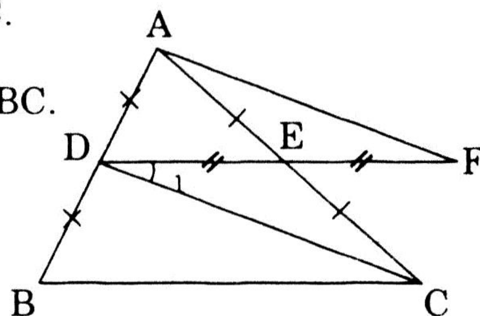
Gọi E là giao điểm của BD và AC.

$\widehat{BDC} > \widehat{DEC}$, $\widehat{DEC} > \widehat{BAE}$.

Bài 327. Cho tam giác ABC. Gọi D, E theo thứ tự là trung điểm của AB, AC.

a) Trên tia đối của tia ED lấy điểm F sao cho EF = ED. Chứng minh: AF = DC.

b) Chứng minh rằng DE = $\frac{1}{2}$BC, DE // BC.



Hướng dẫn

a) ΔAEF = ΔCED (c.g.c)

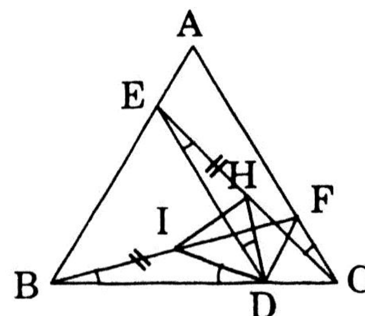
b) ΔADF = ΔDBC (c.g.c)

Bài 328. Cho tam giác ABC ($\hat{B} < 90^0$). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C vẽ tia Bx ⊥ AB. Trên tia Bx lấy điểm D sao cho BD = BA. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A vẽ tia By ⊥ BC. Trên tia By lấy điểm E sao cho BE = BC. Chứng minh rằng AE = DC, AE ⊥ DC.

Hướng dẫn

ΔABE = ΔDBC

Bài 329. Cho tam giác đều ABC. Lấy điểm D trên BC các đường thẳng đi qua D song song với AC và AB cắt AB và AC tại E và F. Gọi I, H là trung điểm của BF, CE. Chứng minh rằng tam giác DHI là tam giác đều.



Hướng dẫn

ΔCDF, ΔBDE đều

ΔDCE = ΔDFB (c.g.c).

Bài 330. Cho tam giác ABC, có các góc nhỏ hơn 120^0. Dựng ra phía ngoài tam giác ABC, các tam giác đều ABD và ΔACE.

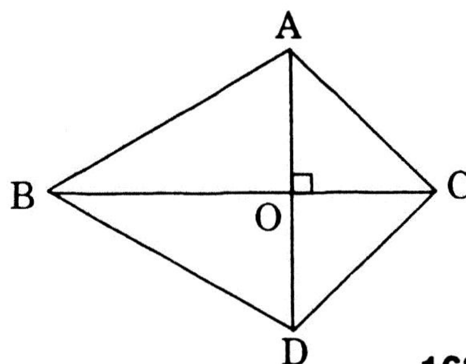
a) Chứng minh CD = BE.

b) Gọi I là giao điểm của BE và CD. Tính góc $\widehat{BIC}$.

Hướng dẫn

a) ΔADC = ΔABE

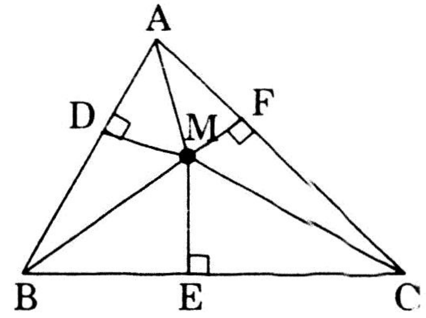
Bài 331. Cho hình bên (AD ⊥ BC). Chứng minh rằng: $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$



Hướng dẫn

$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$

$(= OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2)$.



Bài 332. Cho tam giác nhọn ABC. M là điểm nằm trong tam giác ABC. Vẽ MD $\perp$ AB tại D, ME $\perp$ BC tại E, MF $\perp$ AC tại F. Chứng minh rằng:

$$AD^2 + BE^2 + CF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2.$$

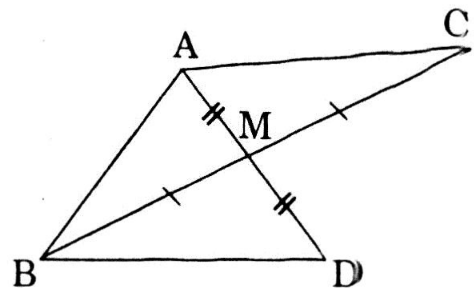
Hướng dẫn

$AD^2 + BE^2 + CF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$

$(= MA^2 + MB^2 + MC^2 - MD^2 - ME^2 - MF^2)$

Bài 333. Cho tam giác ABC có M là trung điểm cạnh BC và AB = 6cm, AC = 10cm, AM = 4cm. Chứng minh rằng $\widehat{MAB} = 90^0$.

Hướng dẫn



Gọi D là điểm sao cho M là trung điểm đoạn thẳng AD

$\Delta MAC = \Delta MDB$ (c.g.c)

Từ đó có BD = 10cm, AD = 8cm

ΔABD có $AB^2 + AD^2 = BD^2$

Theo định lí Py–ta–go đảo có ΔABD vuông tại A.

Bài 334. Cho tam giác ABC có $\widehat{B}, \widehat{C} < 90^0$. Vẽ ra phía ngoài tam giác ấy các tam giác vuông cân ABD và ACE (trong đó $\widehat{ABD} = \widehat{ACE} = 90^0$). Vẽ DI và EK cùng vuông góc với đường thẳng BC. Chứng minh rằng:

a) BI = CK.　　　　b) BC = DI + EK.

Hướng dẫn

Vẽ AH $\perp$ BC tại H.

$\Delta HAB = \Delta IBD$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow$ AH = BI, HB = DI.

$\Delta AHC = \Delta CKE$ (cạnh huyền – góc nhọn).

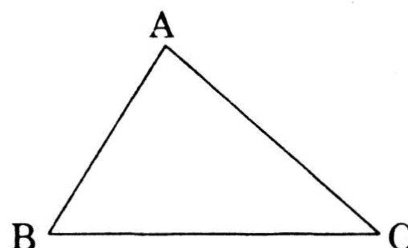
Chương III: QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC. CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY TRONG TAM GIÁC

§1. QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH ĐỐI DIỆN TRONG TAM GIÁC

A/ TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Góc đối diện với cạnh lớn hơn:

Định lí 1: Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.



GT	ΔABC, $AC > AB$
KL	$\hat{B} > \hat{C}$

2. Cạnh đối diện với góc lớn hơn:

Định lí 2: Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

GT	ΔABC, $\hat{B} > \hat{C}$
KL	$AC > AB$

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 335. Cho tam giác ABC có AB = 6cm, AC = 8cm, BC = 10cm. So sánh các góc của tam giác ABC

Giải

Xét ΔABC có $AB < AC < BC$ (vì 6cm < 8cm < 10cm)

$\hat{C} < \hat{B} < \hat{A}$ (Quan hệ giữa các góc và cạnh đối diện trong một tam giác).

Bài 336. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 50^0$; $\hat{C} = 30^0$. So sánh các cạnh của tam giác ABC.

Giải

Xét ΔABC có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0$

mà $\widehat{A} = 50^0$ (gt), $\widehat{C} = 30^0$ (gt)

Nên $\widehat{B} = 180^0 - 50^0 - 30^0 = 100^0$

Xét ΔABC có $\widehat{C} < \widehat{A} < \widehat{B}$

(vì $30^0 < 50^0 < 100^0$)

$\Rightarrow AB < BC < AC$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác).

Bài 337. Góc đối diện với cạnh nhỏ nhất của tam giác là góc gì (trong các loại góc: nhọn, vuông, tù)? Tại sao?

Giải

Theo định lí 1, góc đối diện với cạnh nhỏ nhất là góc nhỏ nhất mà tổng ba góc của một tam giác là 180^0 nên góc nhỏ nhất của tam giác chỉ có thể là góc nhọn.

Bài 338. Cho tam giác MBC với MC > MB. Trên tia MC, lấy điểm B' sao cho MB' = MB.

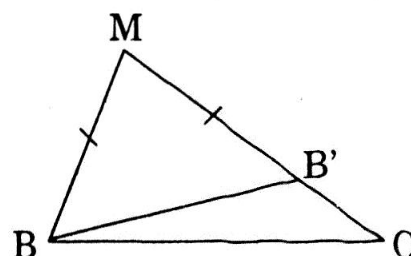
a) Hãy so sánh $\widehat{MBC}$ với $\widehat{MBB'}$.

b) Hãy so sánh $\widehat{MBB'}$ với $\widehat{MB'B}$.

c) Hãy so sánh $\widehat{MB'B}$ với $\widehat{MCB}$.

d) Từ các kết quả trên, hãy so sánh $\widehat{MBC}$ và $\widehat{MCB}$.

Giải



a) $\widehat{MBC} > \widehat{MBB'}$ (vì tia BB' nằm trong góc $\widehat{MBC}$).

b) MB = MB' (gt) $\Rightarrow \Delta MBB'$ cân tại M

$\Rightarrow \widehat{MBB'} = \widehat{MB'B}$.

c) $\widehat{MB'B} > \widehat{MCB}$ ($\widehat{MB'B}$ là góc ngoài của $\Delta BB'C$).

d) $\widehat{MBC} > \widehat{MCB}$.

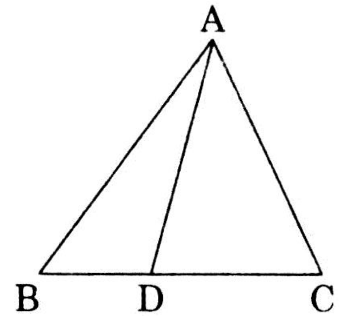
Bài 339. Cho tam giác ABC cân tại A. D là điểm trên cạnh BC. So sánh AB và AD.

Giải

Ta có $\widehat{ADB} > \hat{C}$ ($\widehat{ADB}$ là góc ngoài của ΔADC)

Mà $\hat{C} = \hat{B}$ (ΔABC cân tại A)

Do đó $\widehat{ADB} > \hat{B}$



Xét ΔABD có $\widehat{ADB} > \hat{B}$

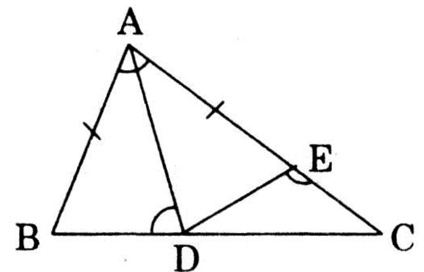
$\Rightarrow$ AB > AD (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác).

Bài 340. Cho tam giác ABC có AB < AC, tia phân giác $\widehat{BAC}$ cắt BC tại D. Chứng minh rằng CD > BD.

Giải

Lấy điểm E trên cạnh AC sao cho AE = AB.

Xét ΔABD và ΔAED có:



AB = AE

$\widehat{BAD} = \widehat{EAD}$ (AD là tia phân giác);

AD (cạnh chung)

Do đó $\Delta ABD = \Delta AED$ (c.g.c)

Suy ra: BD = DE, $\widehat{ADB} = \widehat{ADE}$

Ta có $\widehat{DEC} > \widehat{ADE}$ (vì $\widehat{DEC}$ là góc ngoài của ΔADE)

Do đó $\widehat{DEC} > \widehat{ADB}$

Mà $\widehat{ADB} > \widehat{ECD}$ ($\widehat{ADB}$ là góc ngoài của ΔADC)

Suy ra $\widehat{DEC} > \widehat{ECD}$

Xét ΔDEC có $\widehat{DEC} > \widehat{ECD}$

$\Rightarrow$ CD > DE (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác)

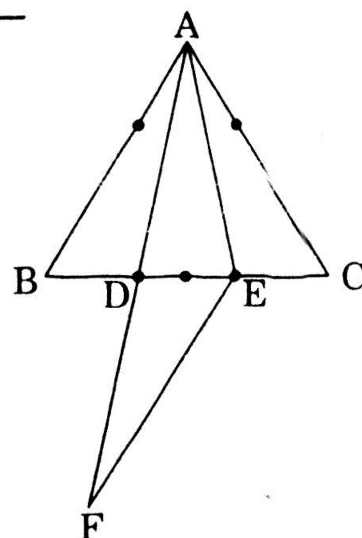
Mà BD = DE.

Do đó CD > BD.

Bài 341. Cho tam giác cân ABC (AB = AC). Trên cạnh đáy BC lấy các điểm D, E sao cho BD = DE = EC. Chứng minh rằng $\widehat{BAD} < \widehat{DAE}$.

Giải

GT	ΔABC (AB = AC), BD = DE = EC
KL	$\widehat{BAD} < \widehat{DAE}$



Vẽ tia đối của tia DA, trên tia này lấy điểm F sao cho DF = DA.

Xét ΔDAB và ΔDFE có:

DA = DF, $\widehat{ADB} = \widehat{FDE}$ (đối đỉnh), BD = DE (gt).

Do đó $\Delta DAB = \Delta DFE$ (c.g.c)

Suy ra AB = EF, $\widehat{BAD} = \widehat{DFE}$

Mặt khác $\widehat{AED} > \widehat{ACE}$ ($\widehat{AED}$ là góc ngoài của ΔAEC)

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{ACE}$ (AB = AC)

$\Rightarrow \widehat{AED} > \widehat{ABC}$

Xét ΔABE có: $\widehat{AED} > \widehat{ABC} \Rightarrow AB > AE$

Ta có AE < AB, AB = EF $\Rightarrow$ AE < EF

Xét ΔAEF có AE < EF $\Rightarrow \widehat{AFE} < \widehat{FAE}$

Mà $\widehat{BAD} = \widehat{DFE}$

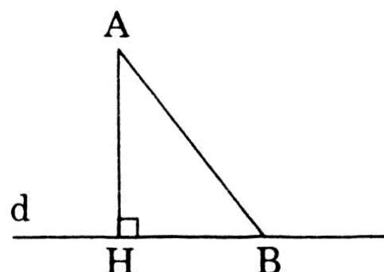
Do đó $\widehat{BAD} < \widehat{DAE}$

§2. QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN, ĐƯỜNG XIÊN VÀ HÌNH CHIẾU

A/ TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm đường vuông góc, đường xiên, hình chiếu của đường xiên:

Cho hình bên, AH ⊥ d



– Đoạn thẳng AH gọi là đoạn vuông góc hay đường vuông góc. Kẻ từ điểm A đến đường thẳng d, điểm H gọi là chân đường vuông góc hay hình chiếu của điểm A trên đường thẳng d.

– Đoạn thẳng AB gọi là một đường xiên kẻ từ điểm A đến đường thẳng d.

– Đoạn thẳng HB gọi là hình chiếu của đường xiên AB trên đường thẳng d.

2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên:

Định lí 1: Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường vuông góc là đường ngắn nhất.

GT	$A \notin d$ AH là đường vuông góc AB là đường xiên
KL	AH < AB

– Độ dài đường vuông góc AH gọi là khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d.

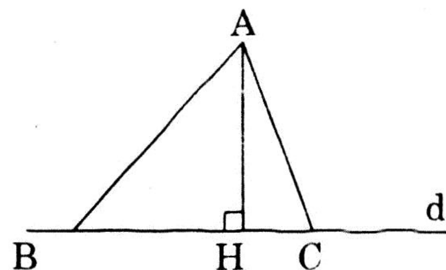
3. Các đường xiên và hình chiếu của chúng:

Định lí 2: Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó:

a) Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.

b) Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn.

c) Nếu hai đường xiên bằng nhau thì hai hình chiếu bằng nhau, và ngược lại, nếu hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.

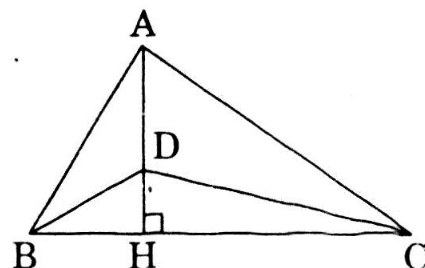


B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 342. Cho hình vẽ sau, có AB < AC, AH ⊥ BC. Chứng minh rằng

a) HB < HC

b) DB < DC.



Giải

a) HB là hình chiếu của AB trên BC, HC là hình chiếu của AC trên BC và AB < AC (gt).

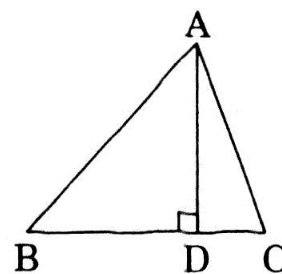
⇒ HB < HC (đường xiên nhỏ hơn thì hình chiếu nhỏ hơn).

b) HB là hình chiếu của DB trên BC, HC là hình chiếu của DC trên BC và HB < HC (chứng minh trên).

⇒ DB < DC (hình chiếu nhỏ hơn thì đường xiên nhỏ hơn).

Bài 343. Cho tam giác ABC có $\hat{B} < \hat{C}$. Vẽ AD ⊥ BC tại D. So sánh DB và DC.

Giải



Xét ΔABC có $\hat{B} < \hat{C}$ (gt)

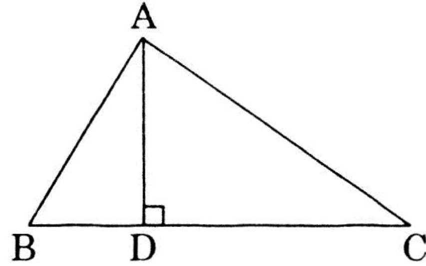
⇒ AC < AB.

Ta có BD là hình chiếu của AB trên BC, DC là hình chiếu của AC trên BC mà AB > AC

Do đó DB > DC (đường xiên lớn hơn thì hình chiếu lớn hơn)

Bài 344. Cho hình vẽ bên có AD ⊥ BC và BD < DC. Chứng minh rằng $\widehat{ACB} < \widehat{ABC}$.

Giải



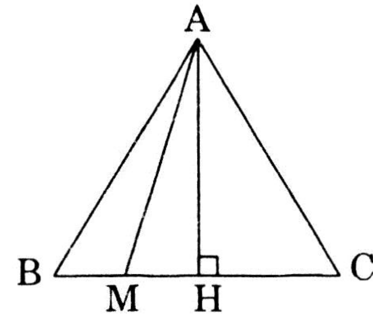
Ta có BD là hình chiếu của AB trên BC, DC là hình chiếu của AC trên BC mà BD < DC (gt)

$\Rightarrow$ AB < AC

ΔABC có AB < AC $\Rightarrow$ $\widehat{ACB} < \widehat{ABC}$.

Bài 345. Cho tam giác ABC cân tại A. M là điểm bất kì trên cạnh BC. Chứng minh rằng AM $\le$ AB hoặc AM $\le$ AC.

Giải



Xét tam giác ABC cân tại A. Vẽ đường AH vuông góc BC tại H.

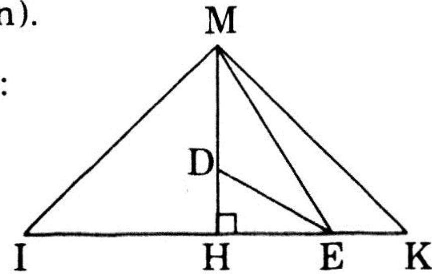
M là điểm bất kì trên cạnh BC.

- Nếu M $\equiv$ B (hoặc M $\equiv$ C) thì có AM = AB = AC
- Nếu M $\equiv$ H thì AM = AH < AB (đường vuông góc ngắn hơn đường xiên).
- Nếu M nằm giữa B và H (hoặc M nằm giữa C và H thì có HM < HB (hoặc HM < HC) nên AM < AB (hoặc AM < AC) (hình chiếu nhỏ hơn thì đường xiên nhỏ hơn).

Bài 346. Cho hình vẽ. Hãy chứng minh rằng:

a) ME < MK.

b) DE < MK



Giải

a) Ta có: HE < HK (vì E thuộc đoạn HK)

$\Rightarrow$ ME < MK (hình chiếu nhỏ hơn thì đường xiên nhỏ hơn)

b) Ta có: HD < HM (vì D thuộc đoạn HM)

$\Rightarrow$ DE < ME (hình chiếu nhỏ hơn thì đường xiên nhỏ hơn)

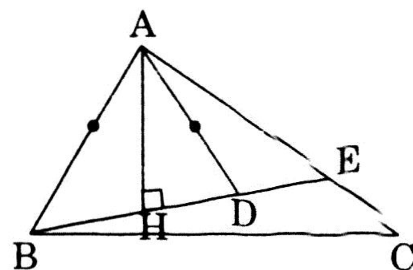
DE < ME và ME < MK

Suy ra: DE < MK.

Bài 347. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu trong tam giác có điểm D sao cho AD = AB thì AB < AC.

Giải

GT	ΔABC, AD = AB
KL	AB < AC



Vẽ AH ⊥ BD (H ∈ BD).

Gọi E là giao điểm của BD và AC.

Ta có AB = AD (gt) và AH ⊥ BD.

Mà HD < HE.

Do đó AD < AE (quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu của nó).

Mặt khác AE < AC (vì E nằm giữa A và C)

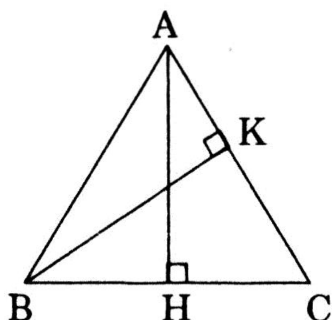
Suy ra AD < AC

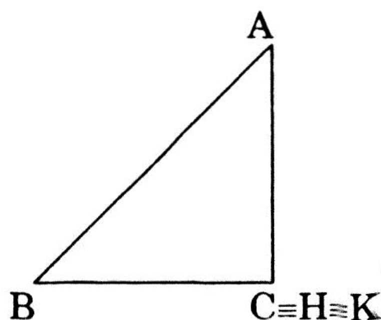
Mà AB = AD

Do đó AB < AC

Bài 348. Cho tam giác ABC không có góc tù, vẽ AH ⊥ BC tại H, BK ⊥ AC tại K. Cho biết AH ≥ BC và BK ≥ AC. Tính số đo các góc của tam giác ABC.

Giải





Ta có AH ⊥ HC (gt) nên AC ≥ AH

BK ⊥ KC (gt) nên BC ≥ BK.

Mà AH ≥ BC (gt), BK ≥ AC (gt)

Do đó AC ≥ AH ≥ BC ≥ BK ≥ AC

Như vậy AC = AH = BC = BK = AC

Tức là C, H, K trùng nhau và AC = BC

ΔABC vuông tại C có AC = BC

nên là tam giác vuông cân tại C.

Suy ra $\widehat{BAC} = 45^0$, $\widehat{ABC} = 45^0$, $\widehat{ACB} = 90^0$.

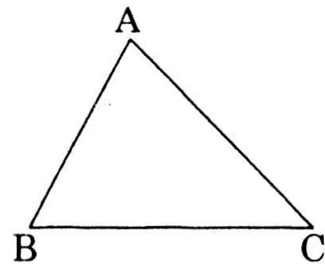
§3. QUAN HỆ GIỮA BA CẠNH CỦA MỘT TAM GIÁC BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

A/ TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Bất đẳng thức tam giác:

Định lí 1: Trong một tam giác, tổng độ dài hai cạnh bất kì bao giờ cũng lớn hơn độ dài cạnh còn lại.

GT	ΔABC
KL	AB + AC > BC
	AB + BC > AC
	AC + BC > AB



2. Hệ quả của bất đẳng thức tam giác:

Hệ quả:

Trong một tam giác, hiệu độ dài hai cạnh bất kì bao giờ cũng nhỏ hơn độ dài cạnh còn lại.

Nhận xét:

Trong một tam giác, độ dài một cạnh bao giờ cũng lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng các độ dài của hai cạnh còn lại.

Lưu ý:

Khi xét độ dài ba đoạn thẳng có thỏa mãn là ba cạnh của một tam giác hay không, ta chỉ cần so sánh độ dài lớn nhất với tổng hai độ dài còn lại, hoặc so sánh độ dài nhỏ nhất với hiệu hai độ dài còn lại (lớn trừ nhỏ).

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 349. Dựa vào bất đẳng thức tam giác, kiểm tra xem bộ ba nào trong các bộ ba đoạn thẳng có độ dài cho sau đây, không thể là ba cạnh của một tam giác. Trong những trường hợp còn lại, hãy thử dựng tam giác có độ dài cạnh như thế:

a) 5cm, 3cm, 9cm.

b) 2cm, 3cm, 5cm.

c) 3cm, 4cm, 6cm?

Giải

a) $5 + 3 = 8 < 9$ nên bộ ba 5cm, 3cm, 9cm không thể là ba cạnh của một tam giác.

b) $2 + 3 = 5$ nên bộ ba 2cm, 3cm, 5cm không thể là ba cạnh của một tam giác.

c) $3 < 4 < 6$ và $6 < 3 + 4$. Bộ ba đoạn thẳng 3cm, 4cm, 6cm có thể là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Bài 350. Cho tam giác ABC với hai cạnh BC = 1cm, AC = 9cm. Hãy tìm độ dài cạnh AB, biết rằng độ dài này là một số nguyên (cm). Tam giác ABC là tam giác gì?

Giải

Theo bất đẳng thức tam giác, ta có: $AC - BC < AB < AC + BC$.

Do đó: $9 - 1 < AB < 9 + 1$ hay $8 < AB < 10$.

Mà độ dài AB là một số nguyên (gt) nên AB = 9(cm).

$AB = AC = 9(cm) \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại đỉnh A.

Bài 351. Có tam giác nào mà một cạnh lớn hơn nửa chu vi không? Vì sao?

Giải

Giả sử có một tam giác có ba cạnh là a, b, c thỏa mãn $a > \dfrac{a + b + c}{2}$

Ta có $2a > a + b + c$

$a > b + c$. Trái với bất đẳng thức tam giác.

Do đó điều giả sử trên sai.

Vậy không có tam giác nào mà một cạnh lớn hơn nửa chu vi.

Bài 352. Cho tam giác ABC và M là một điểm nằm trong tam giác. Gọi I là giao điểm của đường thẳng BM và cạnh AC.

a) So sánh MA với MI + IA, từ đó chứng minh:

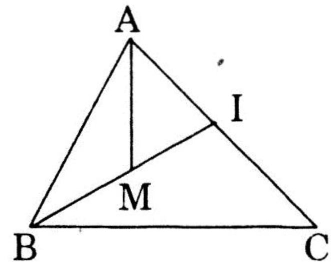
$MA + MB < IB + IA$.

b) So sánh IB với IC + CB, từ đó chứng minh:

$IB + IA < CA + CB$.

c) Chứng minh bất đẳng thức: $MA + MB < CA + CB$.

Giải



a) ΔMAI có $MA < MI + IA$

Do đó: $MA + MB < MB + MI + IA$

$MA + MB < IB + IA$

b) ΔIBC có : $IB < IC + CB$

Do đó: $IB + IA < IA + IC + IB$

Hay $IB + IA < CA + CB$

c) $MA + MB < IB + IA$

$IB + IA < CA + CB \Rightarrow MA + MB < CA + CB$.

Bài 353. Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

a) $a^2 < ab + ca$.

b) $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

Giải

a) a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác, theo bất đẳng thức tam giác.

$a < b + c, a > 0$

$\Rightarrow a.a < a(b + c)$

$\Rightarrow a^2 < ab + ca$

b) Từ a) có $a^2 < ab + ca$

Tương tự có $b^2 < bc + ab$, $c^2 < ca + bc$

Do đó $a^2 + b^2 + c^2 < ab + ca + bc + ab + ca + bc$

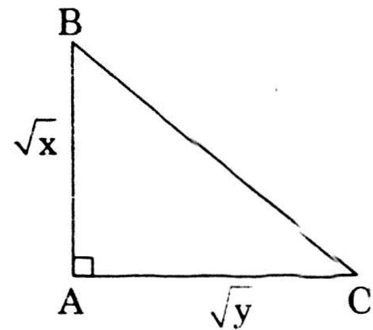
$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

Bài 354. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = $\sqrt{x}$, AC = $\sqrt{y}$ (x, y > 0).

a) Tính BC theo x, y.

b) Chứng minh rằng $\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{x + y}$

Giải



a) Xét ΔABC vuông tại A, theo định lí Py–ta–go có

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = x + y$

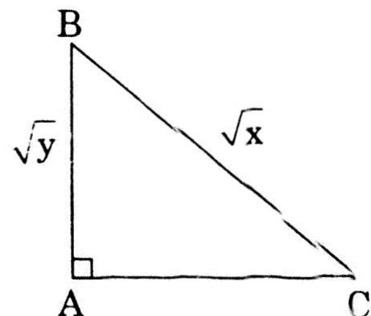
$\Rightarrow BC = \sqrt{x + y}$.

b) ΔABC có AB + AC > BC (bất đẳng thức tam giác)

Do đó $\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{x + y}$.

Bài 355. Cho x > y. Chứng minh rằng $\sqrt{x} - \sqrt{y} > \sqrt{x - y}$

Giải



Xét ΔABC vuông tại A có BC = $\sqrt{x}$, AB = $\sqrt{y}$, theo định lí Py–ta–go ta có:

$AB^2 + AC^2 = BC^2$

$AC^2 = BC^2 - AB^2$

$AC^2 = x - y$

Nên AC = $\sqrt{x - y}$

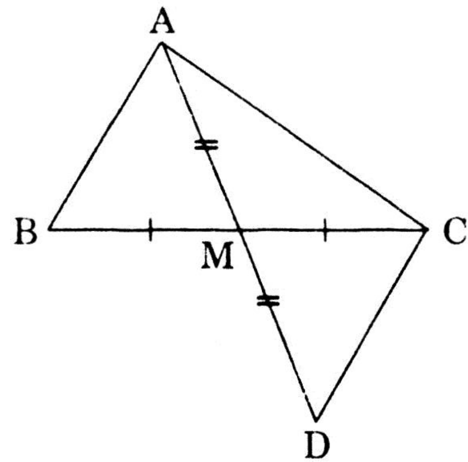
ΔABC có BC – AB < AC

Do đó $\sqrt{x} - \sqrt{y} < \sqrt{x - y}$.

Bài 356. Cho tam giác ABC, M là trung điểm cạnh BC. Chứng minh rằng: 2AM < AB + AC

Giải

GT	ΔABC có:
	AB < AC
	M là trung điểm BC
	AM = MD
KL	2AM < AB + AC



Chứng minh:

Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho MD = MA.

Xét ΔMAB và ΔMDC có:

$MA = MD$, $\widehat{AMB} = \widehat{DMC}$ (đối đỉnh); $MB = MC$ (gt)

Do đó $\Delta MAB = \Delta MDC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \quad AB = DC$

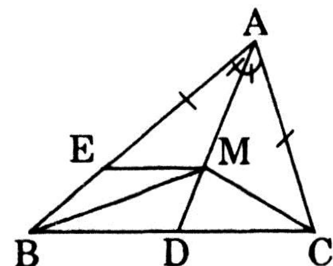
Xét ΔADC có: $AD < DC + AC$ (Bất đẳng thức tam giác)

Do đó $2AM < AB + AC$.

Bài 357. Cho tam giác ABC có AB > AC, tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt tại D. M là điểm nằm trên đoạn thẳng AD. Chứng minh rằng : MB – MC < AB – AC.

Giải

GT	ΔABC có AB > AC
	AD là tia phân giác $\widehat{BAC}$
KL	MB – MC < AB – AC



Chứng minh:

Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho AE = AC

Xét ΔAEM và ΔACM có:

$AE = AC$; $\widehat{EAM} = \widehat{CAM}$ (AD là tia phân giác $\widehat{BAC}$)

AM (cạnh chung)

Do đó $\Delta AEM = \Delta ACM$ (c.g.c)

Suy ra ME = MC

Xét ΔMEB có MB – ME < EB (Bất đẳng thức tam giác)

Vì AB > AC và E nằm trên cạnh AB.

Nên E nằm giữa A và B.

$\Rightarrow$ AE + EB = AB

$\Rightarrow$ EB = AB – AE

Do đó EB = AB – AC

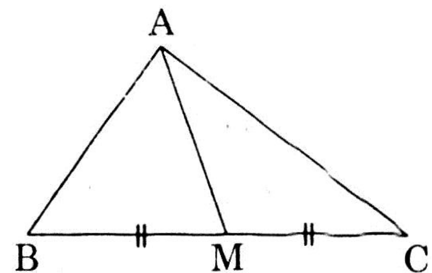
Vậy MB – MC < AB – AC

§4. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

A/ TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đường trung tuyến của tam giác:

Cho hình bên, đoạn thẳng AM là đường trung tuyến (xuất phát từ đỉnh A hoặc ứng với cạnh BC của tam giác ABC). Đường thẳng AM cũng gọi là đường trung tuyến của tam giác ABC.



– Mỗi tam giác có ba đường trung tuyến.

2. Tính chất ba đường trung tuyến của tam giác:

Định lí:

Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm đó cách đều mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy. Điểm đó gọi là trọng tâm của tam giác.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 358. Cho hình vẽ. Hãy điền số thích hợp vào chỗ trống:

a) EG = ... ER; GR = ... ER; GR = ... EG

b) FS = ... FG; FS = ... GS; FG = ... GS.

Giải

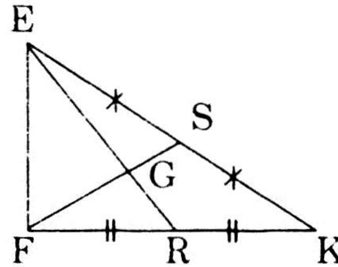
ΔEFH có hai đường trung tuyến ER và FS cắt nhau tại G

$\Rightarrow$ G là trọng tâm tam giác EFK

a) $EG = \frac{2}{3}ER$

$GR = \frac{1}{3}ER$

$GR = \frac{1}{2}EG$



b) $FS = \frac{3}{2}FG$

$FS = 3GS$

$FG = 2GS.$

Bài 359. Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết AB = 12cm, AC = 9cm. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến trọng tâm G của tam giác ABC.

Giải

Xét ΔABC vuông tại A, theo định lí Py–ta–go ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 12^2 + 9^2 = 15^2 \Rightarrow BC = 15(cm).$$

ΔABC vuông tại A, AM là đường trung tuyến nên chứng tỏ được.

$$AM = \frac{BC}{2} = \frac{15}{2}(cm)$$

ΔABC có G là trọng tâm.

Do đó: $AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{15}{2} = 5(cm)$

Bài 360. Cho tam giác ABC. Các đường trung tuyến BD và CE cắt nhau tại F. AF cắt BC tại S. Tính tỉ số $\frac{SB}{BC}$.

Giải

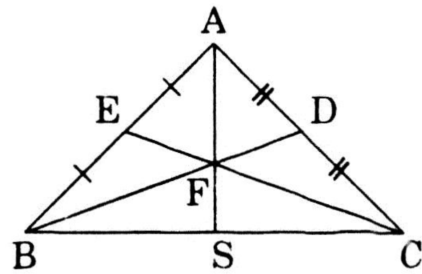
Xét ΔABC có BD và CE là hai đường trung tuyến cắt nhau tại F (gt)

$\Rightarrow$ F là trọng tâm tam giác ABC.

Do đó S là trung điểm cạnh BC

$\Rightarrow SB = \frac{1}{2}BC$

$\Rightarrow \frac{SB}{BC} = \frac{1}{2}$.



Bài 361. Cho tam giác ABC:

a) Dựng trọng tâm G của tam giác ấy.

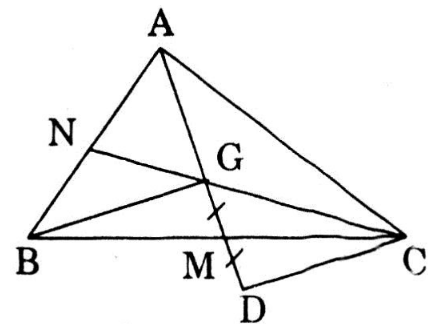
b) Gọi M là trung điểm của cạnh BC, trên tia đối của tia MG. Xác định điểm D sao cho MD = MG; đoạn thẳng CG có phải là đường trung tuyến của ΔACD không?

Giải

a) – Dựng trung điểm M của BC;

– Dựng trung điểm N của AB;

– G là giao điểm của AM và CN.



b) ΔABC có G là trọng tâm

$\Rightarrow \quad AG = \frac{2}{3}AM$

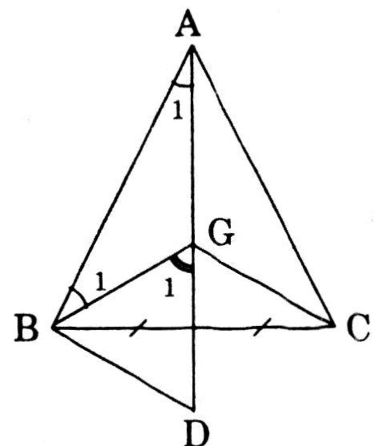
Do đó AG = 2GM.

Từ MD = MG (gt) $\Rightarrow$ GD = 2GM

Suy ra AG = GD

Vậy CG là đường trung tuyến của ΔACD

Bài 362. Cho tam giác đều ABC, gọi G là trọng tâm của nó. Trên tia AG lấy điểm D sao cho G là trung điểm của đoạn AD. Chứng minh rằng tam giác BGD là tam giác đều.



Giải

Trong tam giác đều, các trung tuyến cũng là đường phân giác.

Do đó $\widehat{A_1} = \widehat{B_1} = 30^0$.

Suy ra GA = GB mà GA = GD. Suy ra:

GB = GD nên ΔBGD cân tại G.

Mặt khác $\widehat{G_1} = \widehat{A_1} + \widehat{B_1} = 60^0$.

Do đó ΔBGD cân có $\widehat{G_1} = 60^0$ nên ΔBGD đều.

Bài 363. Cho tam giác ABC có các đường trung tuyến BD và CE; BD < CE. Chứng minh rằng $\widehat{DBC} > \widehat{ECB}$.

Giải

ΔABC có: BD và CE là hai đường trung tuyến cắt nhau tại G

$\Rightarrow$ G là trọng tâm ΔABC.

$\Rightarrow BG = \frac{2}{3}BD; CG = \frac{2}{3}CE$

Mà BD < CE (gt)

Do đó BG < CG

ΔGBC có GC > GB

$\Rightarrow \widehat{GBC} > \widehat{GCB}$ (đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn)

Vậy $\widehat{DBC} > \widehat{ECB}$.

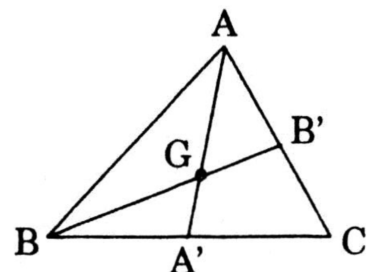
Bài 364. Chứng minh rằng không tồn tại tam giác mà trong đó đường trung tuyến đều nhỏ hơn nửa cạnh tương ứng.

Giải

Giả sử tồn tại ΔABC có AA'; BB' là các đường trung tuyến mà:

$AA' < \frac{1}{2}BC; BB' < \frac{1}{2}AC$

Suy ra: $AA' + BB' < \frac{1}{2}(BC + AC)$ (1)



Gọi G là giao điểm của AA' và BB'

ΔGAB' có: GA + GB' > AB'

ΔGA'B có: GA' + GB > A'B

$AB' = \frac{1}{2}AC$ (B' là tung điểm AC)

$A'B = \frac{1}{2}BC$ (A' là trung điểm BC)

Suy ra: $GA' + GB + GA + GB' > \frac{1}{2}(BC + AC)$

$$AA' + BB' > \frac{1}{2}(BC + AC) \qquad (2)$$

(vì $AA' = GA + GA'$; $BB' = GB + GB'$)

(1) và (2) mâu thuẫn.

Điều giả sử nói trên sai.

Vậy không tồn tại ΔABC mà trong đó có hai đường trung tuyến nhỏ hơn nửa cạnh tương ứng.

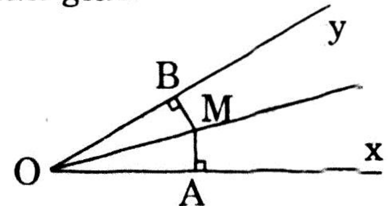
§5. TÍNH CHẤT TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC

A/ TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định lí về tính chất các điểm thuộc tia phân giác:

Định lí 1: (định lí thuận)

Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó.



2. Định lí đảo:

Định lí 2: (định lí đảo)

Điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc đó.

B/ CÁC BÀI TOÁN

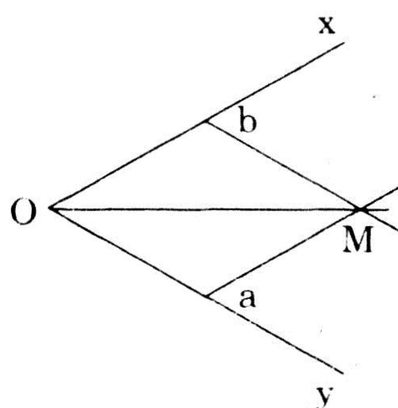
Bài 365. Hình bên cho biết cách vẽ tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$ bằng thước hai lề:

– Áp một lề của thước vào cạnh Ox, kẻ đường thẳng a theo lề kia.

– Làm tương tự với cạnh Oy, ta kẻ được đường thẳng b.

– Gọi M là giao điểm của a và b, ta có OM là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

Hãy chứng minh tia OM được vẽ như vậy đúng là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

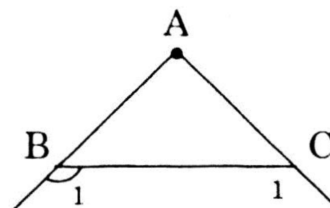


Giải

Khoảng cách từ điểm M đến Ox và khoảng cách từ điểm M đến Oy đều là khoảng cách giữa hai lề song song của thước kẻ nên chúng bằng nhau. Theo định lí 2 có điểm M nằm trên tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

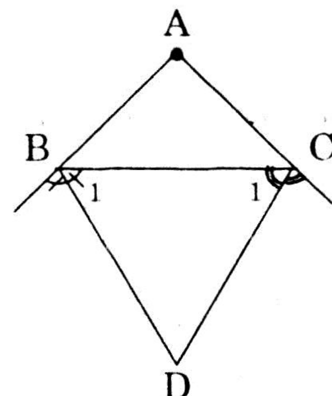
Vậy tia OM là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

Bài 366. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng giao điểm của hai tia phân giác của hai góc ngoài ở đỉnh B và C (góc B_1 và góc C_1) nằm trên tia phân giác của góc A.



Giải

Gọi D là giao điểm của hai tia phân giác góc B_1 và C_1. Theo định lí 1 ta có khoảng cách từ D đến AB bằng khoảng cách từ D đến BC và khoảng cách từ D đến AC bằng khoảng cách từ D đến BC.



Suy ra khoảng cách từ D đến AB bằng khoảng cách từ D đến AC nên theo định lí 2, ta có D nằm trên tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

Bài 367. Cho góc $\widehat{xOy}$ khác góc bẹt. Trên tia Ox lấy hai điểm A và B, trên tia Oy lấy hai điểm C và D sao cho OA = OC, OB = OD. Gọi I là giao điểm của hai đoạn thẳng AD và BC. Chứng minh rằng:

a) BC = AD

b) ΔIAC cân, ΔIBD cân

c) I cách đều hai cạnh Ox, Oy của xOy.

Giải

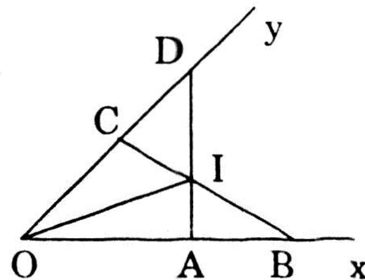
a) Xét ΔOBC và ΔODA có:

OC = OA (gt), $\widehat{BOC}$ (chung)

OB = OD (gt)

Do đó ΔOBC = ΔODA (c.g.c)

$\Rightarrow$ BC = AD.



b) OC = OA, OD = OB

$\Rightarrow$ OD – OC = OB – OA

$\Rightarrow$ CD = AB

Mặt khác có: $\widehat{OCB} = \widehat{OAD}$ (ΔOBC = ΔODA) $\Rightarrow$ $\widehat{ICD} = \widehat{IAB}$

$\widehat{CID} = \widehat{AIB}$ (đối đỉnh)

Do đó: ΔICD = ΔIAB (g.c.g) $\Rightarrow$ IC = IA, ID = IB.

Suy ra tam giác IAC cân tại I, tam giác IBD cân tại I.

c) Xét ΔOIB và ΔOID có: OB = OD (gt), IO (cạnh chung), IB = ID

Do đó: ΔOIB = ΔOID (c.c.c) $\Rightarrow$ $\widehat{IOB} = \widehat{IOC}$

$\Rightarrow$ OI là tia phân giác góc $\widehat{xOy}$ $\Rightarrow$ I cách đều Ox và Oy.

Bài 368. Cho hình bên. Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng.

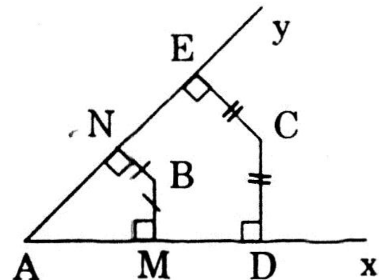
Giải

Ta có BM $\perp$ Ax, BN $\perp$ Ay và BM = BN

Do đó B thuộc tia phân giác của góc $\widehat{xAy}$

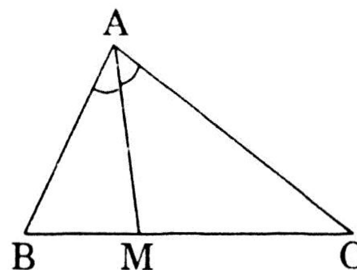
Chứng minh tương tự ta có C thuộc tia phân giác của góc $\widehat{xAy}$

$\Rightarrow$ A, B, C thẳng hàng.



§6. TÍNH CHẤT CỦA BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

A/ TÓM TẮT LÝ THUYẾT



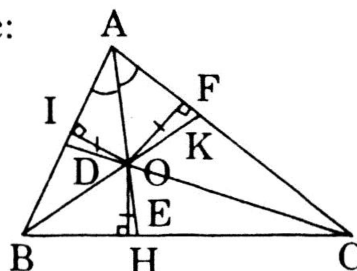
1. Đường phân giác của tam giác:

Cho hình bên, đoạn thẳng AM được gọi là đường phân giác (xuất phát từ đỉnh A) của tam giác ABC.

Đường thẳng AM cũng gọi là đường phân giác của tam giác ABC. Mỗi tam giác có ba đường phân giác.

Tính chất: Trong một tam giác cân, đường phân giác xuất phát từ đỉnh đồng thời là đường trung tuyến ứng với cạnh đáy.

2. Tính chất ba đường phân giác của tam giác:

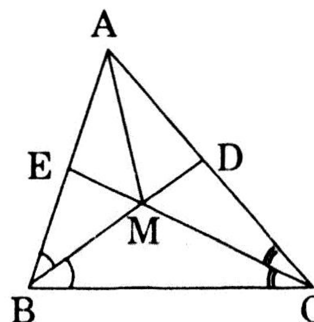


Định lí: Ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba cạnh của tam giác đó.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 369. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^0$, BD và CE là hai đường phân giác của tam giác ABC. BD cắt CE tại M. Tính $\widehat{BAM}$.

Giải

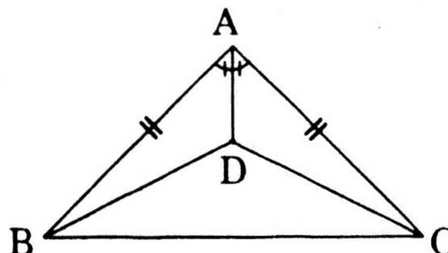


Xét ΔABC có BD và CE là hai đường phân giác cắt nhau tại M (gt)

$\Rightarrow$ AM là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$

Do đó $\widehat{BAM} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAC} = \dfrac{1}{2}.60^0 = 30^0$.

Bài 370. Cho hình bên.



a) Chứng minh $\Delta ABD = \Delta ACD$

b) So sánh góc $\widehat{DBC}$ và $\widehat{DCB}$

Giải

a) Xét ΔABD và ΔACD có:

AB = AC (gt), $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ (gt); AD (cạnh chung)

Do đó: $\Delta ABD = \Delta ACD$ (c.g.c)

b) $\Delta ABD = \Delta ACD \Rightarrow DB = DC \Rightarrow \Delta DBC$ cân tại D $\Rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{DCB}$.

Bài 371. Cho ΔABC cân tại A. Gọi G là trọng tâm, I là điểm nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh của tam giác đó. Chứng minh ba điểm A, G, I thẳng hàng.

Giải

ΔABC cân tại A nên đường trung tuyến AM của tam giác ABC cũng là đường phân giác xuất phát từ A (theo định lí 1 §6) G là trọng tâm ΔABC nên $G \in AM$, I nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh của tam giác nên I thuộc tia phân giác $\widehat{BAC} \Rightarrow I \in AM$.

Do đó: A, M, G, I thẳng hàng $\Rightarrow$ A, G, I thẳng hàng.

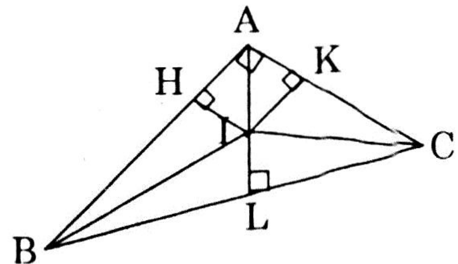
Bài 372. Cho tam giác ABC vuông tại A, I là điểm nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh của tam giác. Gọi khoảng cách từ I đến các cạnh của tam giác ABC là r. Chứng minh rằng AB + AC – BC = 2r.

Giải

Vẽ $IH \perp AB$, $IK \perp AC$, $IL \perp BC$ ($H \in AB$, $K \in AC$, $L \in BC$)

Ta có: $IH = IK = IL$

$$\widehat{HAI} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 45^0$$



ΔHAI vuông tại H có $\widehat{HAI} = 45^0$ nên là tam giác vuông cân

$\Rightarrow \quad IH = AH$

Chứng minh tương tự IK = AK

Xét ΔHBI ($\widehat{BHI} = 90^0$) và ΔLBI ($\widehat{BLI} = 90^0$) có:

IH = IL; IB (cạnh chung)

Do đó $\Delta HBI = \Delta LBI$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow BH = BL$

Chứng minh tương tự cũng có CK = CL

Do đó:

$2r = AH + AK = AB - BH + AC - CK$

$= AB + AC - (BH + CK) = AB + AC - (BL + CL)$

$= AB + AC - BC$

Vậy $AB + AC - BC = 2r$.

Bài 373. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 90^0$, D và E lần lượt trên các cạnh AC và AB sao cho $\widehat{ABD} = \frac{1}{3}\widehat{ABC}$, $\widehat{ACE} = \frac{1}{3}\widehat{ACB}$. Gọi I là giao điểm của BD và CE. Chứng minh rằng tam giác IDE cân.

Giải

Gọi H là giao điểm của các đường phân giác của tam giác IBC.

Ta có: $\widehat{IBH} = \widehat{HBC} = \frac{1}{2}\widehat{IBC}$

$\widehat{ICH} = \widehat{HCB} = \frac{1}{2}\widehat{ICB}$

$\widehat{BIH} = \widehat{HIC} = \frac{1}{2}\widehat{BIC}$

Mà $\widehat{ABD} = \frac{1}{3}\widehat{ABC}$; $\widehat{ACE} = \frac{1}{3}\widehat{ACB}$ (gt)

Suy ra $\widehat{IBH} = \widehat{HBC} = \widehat{ABD}$; $\widehat{ICH} = \widehat{HCB} = \widehat{ACE}$

Xét ΔABC có $\hat{A} = 90^0$

$\Rightarrow \quad \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^0$

$\widehat{IBC} + \widehat{ICB} = \frac{2}{3}\left(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}\right) = 60^0$

ΔIBC có $\widehat{BIC} = 180^0 - \left(\widehat{IBC} + \widehat{ICB}\right) = 120^0$

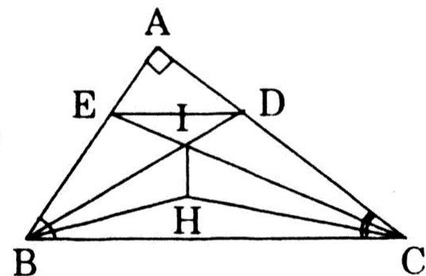
$\widehat{BIE} = \widehat{IBC} + \widehat{ICB}$ ($\widehat{BIE}$ là góc ngoài của ΔBIC)

$\widehat{BIC} + \widehat{BIE} = 180^0$

Suy ra $\widehat{BIE} = 60^0$

Do đó $\widehat{EIB} = \widehat{BIH} = \widehat{HIC} = \widehat{DIC} = 60^0$

Xét ΔEBI và ΔHBI có:



$\widehat{EBI} = \widehat{HBI}$, BI (cạnh chung)

$\widehat{EIB} = \widehat{BIH}$ ($= 60^0$)

Do đó $\Delta EBI = \Delta HBI$ (g.c.g)

Suy ra EI = HI

Chứng minh tương tự ta có DI = HI

Suy ra EI = DI

Vậy tam giác IDE cân tại I.

Bài 374. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^0$, đường phân giác AD, BE, CF. Chứng minh rằng DE ⊥ DF

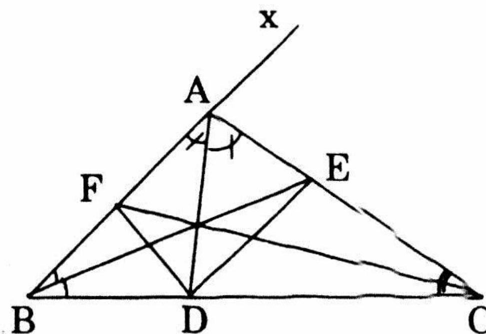
Giải

Vẽ Ax là tia đối của tia AB

Ta có $\widehat{xAC} + \widehat{BAC} = 180^0$ (kề bù) mà $\widehat{BAC} = 120^0$

Nên $\widehat{xAC} = 180^0 - 120^0 = 60^0$

Do đó $\widehat{BAD} = \widehat{DAC} = \widehat{xAC}$ ($= 60^0$)



Xét ΔABD có AE là tia phân giác góc ngoài đỉnh A, BE là tia phân giác trong của góc B nên DE là tia phân giác góc ngoài đỉnh D.

Vậy DE là tia phân giác góc $\widehat{ADC}$

Chứng minh tương tự có DF là tia phân giác góc $\widehat{ADB}$.

Mà $\widehat{ADC}$ và $\widehat{ADB}$ kề bù.

Do đó $\widehat{EDF} = 90^0$

$\Rightarrow$ DE ⊥ DF.

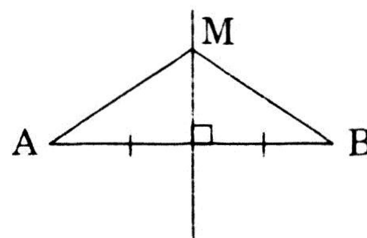
§7. TÍNH CHẤT ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA MỘT ĐOẠN THẲNG

A/ TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định lí về tính chất của các điểm thuộc đường trung trực:

Định lí 1: (định lí thuận)

Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng đó.



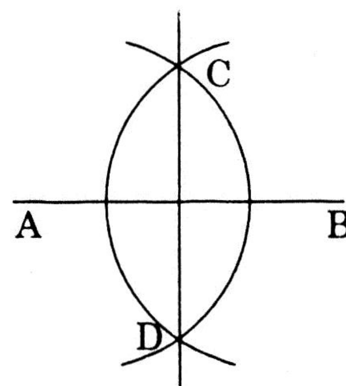
2. Định lí đảo:

Định lí 2: (định lí đảo)

Điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó.

M nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow$ MA = MB

Nhận xét: Tập hợp các điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng đó.



3. Ứng dụng:

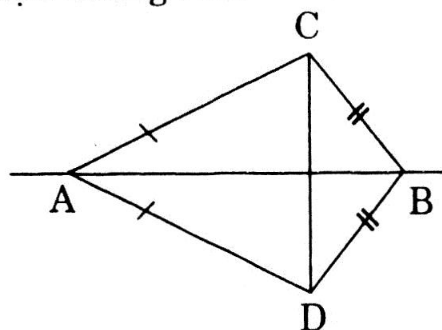
Ta có thể vẽ đường trung trực của đoạn thẳng AB bằng thước và compa như sau:

Lấy A làm tâm vẽ cung tròn bán kính lớn hơn $\frac{1}{2}$AB, sau đó lấy B làm tâm vẽ cung tròn có cùng bán kính đó sao cho hai cung tròn này có hai điểm chung, gọi là C và D. Dùng thước vẽ đường thẳng CD, đường thẳng CD là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Chú ý: CD cắt AB tại trung điểm của đoạn thẳng AB.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 375. Chứng minh đường thẳng AB được vẽ như trong hình bên đúng là đường trung trực của đoạn thẳng CD.



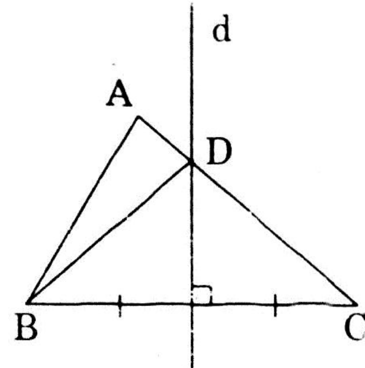
Giải

Theo cách vẽ có AC = AD và BC = BD

⇒ Theo định lí 2, ta có A, B cùng thuộc đường trung trực của đoạn thẳng CD.

Do đó AB là đường trung trực của đoạn thẳng CD.

Bài 376. Cho hình vẽ sau có d là đường trung trực của đoạn thẳng BC. Chứng minh rằng AB < AC.



Giải

d là đường trung trực của BC (gt)

Mà $D \in d \Rightarrow DB = DC$

Xét ΔABD có $AB < AD + DB$

Do đó $AB < AD + DC$

Vậy $AB < AC$.

Bài 377. Cho tam giác cân AMN, BMN, CMN có chung đáy MN. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Giải

ΔAMN cân tại A ⇒ AM = AN

Theo định lí 2, ta có A nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng MN.

Chứng minh tương tự cũng có B, C nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng MN.

Vậy ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Bài 378. Hai điểm M và N cùng nằm trên một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng d. Lấy điểm S đối xứng với M qua d. Gọi H là một điểm của d. Hãy so sánh HM + HN và SN.

Giải

Theo đầu bài ta có d là đường trung trực của đoạn thẳng MS mà $H \in d$

⇒ HM = HS

Gọi I là giao điểm của SN và d

Ta có: IM = IS

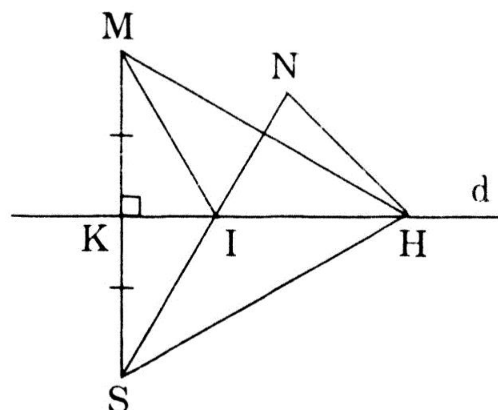
Nếu H ≡ I ta có: HM + HN = SN

Nếu H ≢ I.

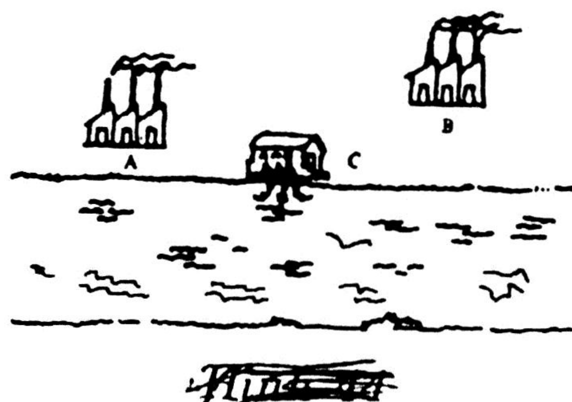
Xét ΔSHN có: SH + HN > SN

Do đó: HM + HN > SN

Tóm lại có: HM + HN ≥ SN.



Bài 379. Hai nhà máy được xây dựng bên bờ một con sông tại hai điểm A và B. Hãy tìm cạnh bờ sông một địa điểm C để xây dựng một trạm bơm đưa nước về cho hai nhà máy sao cho độ dài đường ống dẫn nước là ngắn nhất.



Giải

Gọi bờ sông là đường thẳng d, D là điểm sao cho d là trung trực AD.BD cắt d tại E.

Nếu C ≡ E theo bài toán trên.

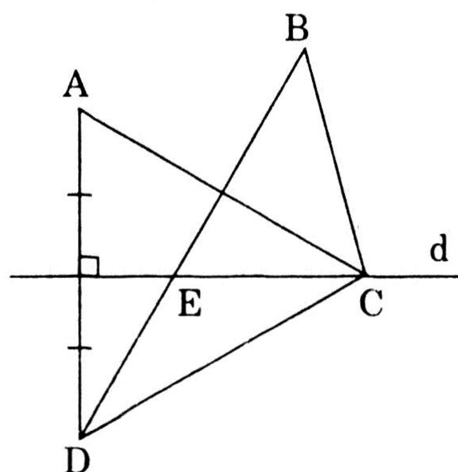
Ta có: CA + CB = BD

Nếu C ≢ E.

Ta có: CA = CD (vì C thuộc đường trung trực của AD)

Xét ΔBCD có: CD + CB > BD.

Do đó: CA + CB > BD.

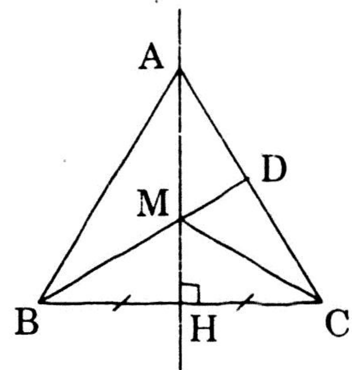


Kết luận: Khi C là giao điểm của d và BD thì CA + CB ngắn nhất.

Bài 380. Cho tam giác ABC cân tại A. D là điểm trên cạnh AC. Nối B với D. Xác định điểm M trên đoạn thẳng BD sao cho $\widehat{BMC} = 2\widehat{AMD}$.

Giải

Vẽ đường trung trực AH của đoạn thẳng BC ($H \in BC$), AH cắt BD tại M.



M là điểm cần xác định. Thật vậy:

Xét $\triangle HBM$ và $\triangle HCM$ có

$BH = HC$, $\widehat{BHM} = \widehat{CHM}$ $(= 90^0)$;

MH (cạnh chung)

Do đó $\triangle HBM = \triangle HCM$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{BMH} = \widehat{HMC}$

Mà tia MH nằm giữa hai tia MB và MC (vì H nằm giữa B và C)

$\Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{BMH} + \widehat{HMC}$.

$\Rightarrow 2\widehat{BMH} = \widehat{BMC}$

Mặt khác $\widehat{BMH} = \widehat{AMD}$ (đối đỉnh)

Do đó $\widehat{BMC} = 2\widehat{AMD}$.

§8. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA TAM GIÁC

A/ TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đường trung trực của tam giác:

Trong một tam giác, đường trung trực của mỗi cạnh gọi là đường trung trực của tam giác đó.

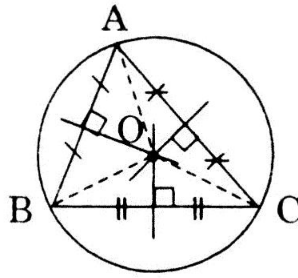
Mỗi tam giác có ba đường trung trực.

Tính chất:

Trong một tam giác cân, đường trung trực của cạnh đáy đồng thời là đường trung tuyến ứng với cạnh này.

2. Tính chất ba đường trung trực của tam giác:

Định lí: Ba đường trung trực của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba đỉnh của tam giác đó.

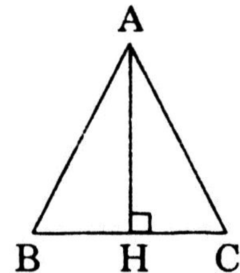


Chú ý: Có một đường tròn tâm O đi qua ba đỉnh A, B, C của tam giác ABC gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 381. Chứng minh định lí: Nếu tam giác có một đường trung tuyến đồng thời là đường trung trực ứng với cùng một cạnh thì tam giác đó là tam giác cân.

Giải



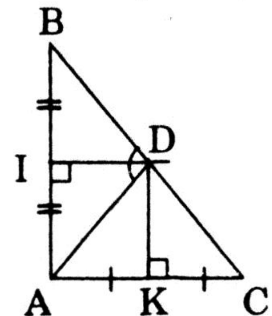
GT	ΔABC có AH là đường trung tuyến, đường trung trực.
KL	ΔABC cân

AH là đường trung trực của ΔABC

$\Rightarrow AB = AC \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A.

Bài 382. Cho hình vẽ bên. Chứng minh ba điểm B, C, D thẳng hàng.

Giải



$DI \perp AB$ (gt); $IA = IB$ (gt)

$\Rightarrow$ DI là đường trung trực của đoạn thẳng AB

$\Rightarrow DA = DB$

$\Rightarrow \Delta DAB$ cân tại D

$\Rightarrow \widehat{ADB} + 2\widehat{ABD} = 180^0$ (1)

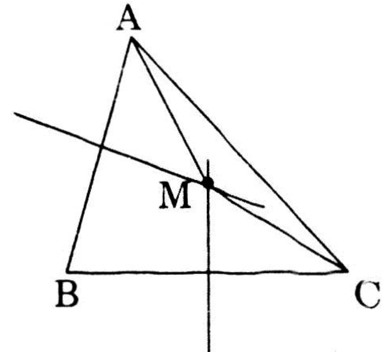
Tương tự: $\widehat{ADC} + 2\widehat{ACD} = 180^0$ (2)

Mà ΔABC có $\widehat{BAC} = 90^0$ nên $\widehat{ABD} + \widehat{ACD} = 90^0$ (3)

Từ (1); (2) và (3) có: $\widehat{ADB} + \widehat{ADC} = 180^0 \Rightarrow$ B, C, D thẳng hàng.

Bài 383. Cho tam giác ABC. Các đường trung trực của AB và BC cắt nhau ở M. Chứng minh rằng $\widehat{MAC} = \widehat{MCA}$.

Giải



ΔABC có các đường trung trực của các cạnh AB, BC cắt nhau ở M (gt)

$\Rightarrow$ M là điểm cách đều ba đỉnh của tam giác ABC

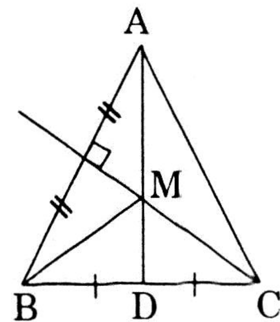
$\Rightarrow$ MA = MC

$\Rightarrow$ ΔMAC cân tại M

$\Rightarrow$ $\widehat{MAC} = \widehat{MCA}$.

Bài 384. Cho tam giác ABC cân tại A. Đường trung tuyến AD cắt đường trung trực của AB tại M. Chứng minh rằng MA = MB = MC.

Giải



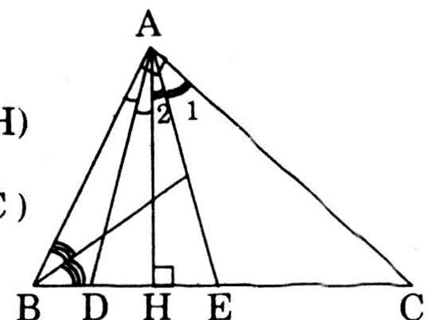
ΔABC cân tại A, AD là đường trung tuyến (gt) nên cũng là đường trung trực.

Ta có M là giao điểm của các đường trung trực của BC, AB của ΔABC.

Nên MA = MB = MC

Bài 385. Cho tam giác ABC vuông tại A, vẽ AH $\perp$ BC tại H. Tia phân giác của góc $\widehat{HAB}$ cắt BC ở D, tia phân giác của góc $\widehat{HAC}$ cắt BC ở E. Chứng minh rằng giao điểm các đường phân giác của tam giác ABC là giao điểm các đường trung trực của tam giác ADE.

Giải



Ta có $\widehat{BAE} + \widehat{A_1} = \widehat{BAC} = 90^0$

và $\widehat{HEA} + \widehat{A_2} = 90^0$ (ΔHAE vuông tại H)

Mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (AE là tia phân giác $\widehat{HAC}$)

Suy ra $\widehat{BAE} = \widehat{HEA}$

$\Rightarrow$ ΔBAE cân tại B

Do vậy tia phân giác góc $\widehat{ABC}$ là đường trung trực của AE.

Chứng minh tương tự cũng có tia phân giác góc $\widehat{ACB}$ là đường trung trực của AD.

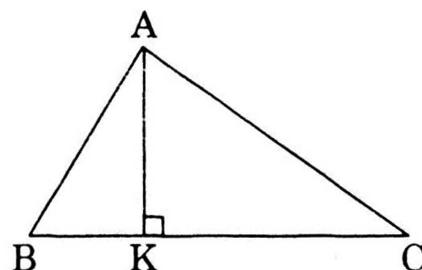
Vậy giao điểm các đường phân giác của tam giác ABC là giao điểm các đường trung trực của tam giác ADE.

§9. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC

A/ TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đường cao của tam giác:

Cho hình bên, đoạn thẳng AK là một đường cao của tam giác ABC, còn nói AK là đường cao xuất phát từ đỉnh A (của tam giác ABC).

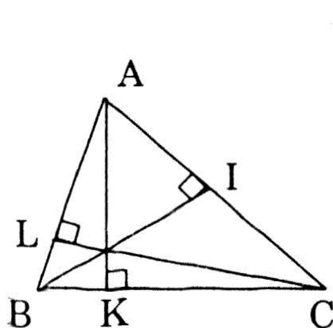


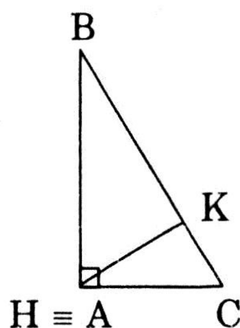
Đôi khi còn gọi đường thẳng AK là một đường cao của tam giác ABC.

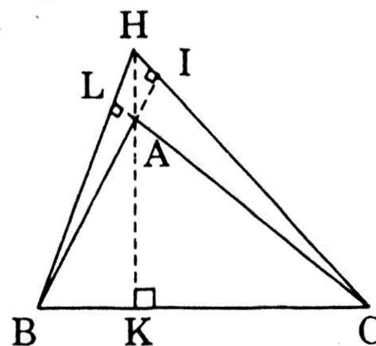
Mỗi tam giác có ba đường cao.

2. Tính chất ba đường cao của tam giác:

Định lí: Ba đường cao của một tam giác cùng đi qua một điểm.







Điểm H gọi là trực tâm của tam giác ABC.

3. Vẽ các đường cao, trung tuyến, trung trực, phân giác của tam giác cân:

Tính chất của tam giác cân:

– Trong một tam giác cân, đường trung trực ứng với cạnh đáy

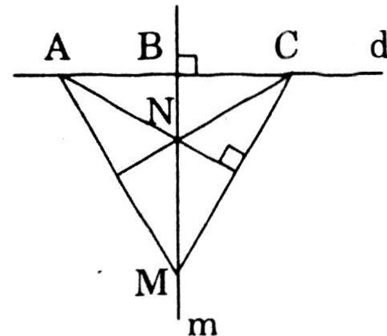
đồng thời là đường phân giác, đường trung tuyến và đường cao xuất phát từ đỉnh đối diện với cạnh đó.

Nhận xét:

- Trong một tam giác, nếu hai trong bốn loại đường (đường trung tuyến, đường phân giác, đường cao cùng xuất phát từ một đỉnh và đường trung trực ứng với cạnh đối diện của đỉnh này) trùng nhau thì tam giác đó là một tam giác cân.
- Trong tam giác đều, trọng tâm, trực tâm, điểm cách đều ba đỉnh, điểm nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh là bốn điểm trùng nhau.

B/ CÁC BÀI TOÁN

Bài 386. Cho đường thẳng d, lần lượt lấy ba điểm phân biệt A, B, C trên đường thẳng d sao cho B nằm giữa A và C. Kẻ đường thẳng m vuông góc với d tại B. Trên m, lấy điểm M khác với điểm B. Đường thẳng qua A vuông góc với MC, cắt m tại N. Chứng minh rằng $CN \perp AM$.



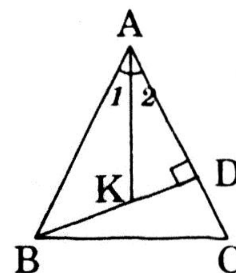
Giải

ΔAMC có MB và AN là hai đường cao ($m \perp d$, $AN \perp MC$) cắt nhau tại N.

$\Rightarrow$ N là trực tâm của tam giác AMC

$\Rightarrow CN \perp AM$.

Bài 387. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao BD cắt tia phân giác của góc $\widehat{A}$ ở K. Chứng minh rằng $CK \perp AB$.



Giải

ΔABC cân tại A, AK là tia phân giác của góc $\widehat{A}$ nên AK cũng là đường cao.

ΔABC có $AK \perp BC$, $BK \perp AC$ nên K là trực tâm. Suy ra: $CK \perp AB$.

Bài 388. Cho tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao. D là điểm trên đoạn thẳng HC. Đường thẳng qua D song song với AC cắt HA ở E. Chứng minh rằng $BE \perp AD$.

Giải

Ta có DE // AC (gt) và AC ⊥ AB ($\widehat{BAC} = 90^0$)

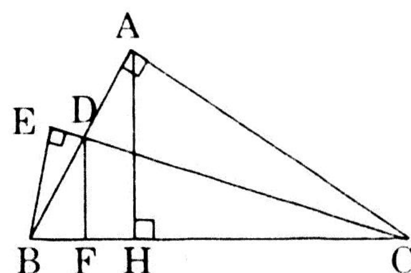
⇒ DE ⊥ AB.

ΔABD có AH và DE là hai đường cao cắt nhau tại E (vì AH ⊥ BC) (gt), DE ⊥ AB (cmt) nên E là trực tâm của tam giác ABD

⇒ BE ⊥ AD.

Bài 389. Cho tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao. Điểm D trên cạnh AB, vẽ BE ⊥ CD tại E, vẽ đường thẳng qua D song song với AH cắt BC ở F. Chứng minh rằng các đường thẳng CA, BE, DF đồng quy.

Giải



Ta có AH ⊥ BC (gt)

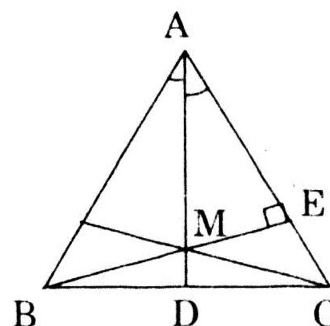
DF // AH (gt)

⇒ DF ⊥ BC.

Xét ΔDBC có CA, BE, DF là ba đường cao (vì CA ⊥ DB, BE ⊥ CD, DF ⊥ BC) nên đồng quy.

Bài 390. Cho tam giác ABC cân tại A. Có đường phân giác AD cắt đường cao BE của tam giác ABC tại M. Chứng minh rằng CM ⊥ AB.

Giải



GT	ΔABC cân tại A AD là đường phân giác BE là đường cao
KL	CM ⊥ AB

Chứng minh

ΔABC cân tại A (gt) và AD là đường phân giác (gt)

⇒ AD là đường cao của tam giác ABC

Xét ΔABC có AD và BE là hai đường cao cắt nhau tại M

⇒ M là trực tâm của ΔABC.

Do đó CM ⊥ AB

Bài 391. Cho tam giác ABC, đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng chứa điểm A bờ là đường thẳng BC lấy các điểm D và E sao cho $BD \perp BA$, $BD = BA$, $CE \perp CA$, $CE = CA$. Chứng minh rằng các đường thẳng AH, BE, CD cùng đi qua một điểm.

Giải

Vẽ tia đối AH, trên tia đó lấy điểm I sao cho $AI = BC$.

Gọi M là giao điểm của IB và DC.

Xét ΔABI và ΔBDC có:

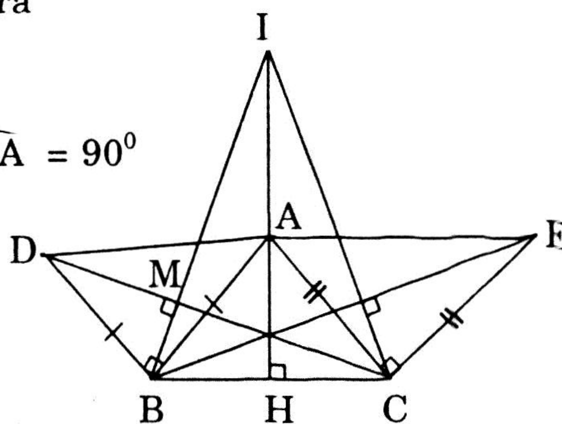
$BA = BD$ (giả thiết), $\widehat{BAI} = \widehat{DBC}$ $(= 90^0 + \widehat{ABC})$, $AI = BC$.

Do đó $\Delta ABI = \Delta BDC$ (c.g.c) suy ra

$$\widehat{IBA} = \widehat{BDC}$$

Ta cũng có: $\widehat{DBM} + \widehat{IBA} = \widehat{DBA} = 90^0$

Vậy $IB \perp DC$.



Chứng minh tương tự ta cũng có $BE \perp IC$.

ΔBIC có AH, BE, CD là ba đường cao nên AH, BE, CD cùng đi qua một điểm.

ÔN TẬP CHƯƠNG III

Bài 392. Gọi AH là đường cao của tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu AB < AC thì BH < CH và $\widehat{CAH} > \widehat{BAH}$.

Hướng dẫn

Trên tia HC lấy điểm D sao cho HD = HB

Chứng minh $\widehat{HAD} = \widehat{HAB}$.

Bài 393. Cho tam giác ABC có $\hat{B} < \hat{C}$. Gọi AH là đường cao của tam giác ABC. So sánh BH và HC.

Hướng dẫn

ΔABC có $\hat{B} < \hat{C} \Rightarrow AC < AB$

$AC < AB \Rightarrow HC < BH$.

Bài 394. Cho tam giác ABC với AC < AB. Trên tia đối của tia BC lấy điểm E sao cho BE = AB khác góc bẹt. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho CD = AC. Nối AD, AE. Chứng minh rằng AD < AE.

Hướng dẫn

Chứng minh $\widehat{AED} < \widehat{ADE}$.

Bài 395. Cho góc $\widehat{xOy}$. Hai điểm I, K lần lượt nằm trên hai cạnh Ox, Oy.

a) Hãy tìm điểm M cách đều hai cạnh của góc $\widehat{xOy}$ và cách đều hai điểm I, K.

b) Nếu OI = OK thì có bao nhiêu điểm M thỏa mãn các điều kiện trong câu a?

Hướng dẫn

a) M là giao điểm của tia phân giác Oz và đường trung trực của đoạn thẳng IK

b) Mọi điểm nằm trên tia Oz đều thỏa mãn câu a.

Bài 396. Cho góc $\widehat{xOy}$ khác góc bẹt với A, B là hai điểm trên hai cạnh Ox, Oy.

a) Hãy tìm điểm M cách đều hai cạnh của góc $\widehat{xOy}$ và cách đều A, B.

b) Nếu OA = OB thì có nhận xét gì?

Hướng dẫn

a) M là trung điểm của đường trung trực d của AB và đường phân giác (trong và ngoài) của góc $\widehat{xOy}$.

b) Nếu OA = OB thì d trùng với đường thẳng Oz. Mọi điểm M thuộc Oz đều thỏa mãn bài toán.

Bài 397. Cho hai đường thẳng phân biệt không song song a và b, điểm M nằm bên trong hai đường thẳng này. Qua M lần lượt vẽ đường thẳng c vuông góc với a tại P, cắt b tại Q và đường thẳng d vuông góc với b tại R, cắt a tại E. Chứng minh rằng đường thẳng qua M, vuông góc với EQ cũng đi qua giao điểm a và b.

Hướng dẫn

Gọi O là giao điểm của a và b

ΔOQE có hai đường cao QP và ER cắt nhau tại M.

Bài 398. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 120^0$, các đường trung trực của hai cạnh bên AB và AC cắt nhau tại O cắt cạnh BC tại E và F.

a) Chứng minh rằng: E, F là trực tâm, trọng tâm của ΔAOB và ΔAOC.

b) Chứng minh rằng: BE = EF = FC.

Hướng dẫn

ΔAOB, ΔAOC là các tam giác đều.

Bài 399. Cho tam giác ABC, đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng chứa điểm A bờ là đường thẳng BC lấy các điểm D và E sao cho:

BD $\perp$ BA, BD = BA, CE $\perp$ CA, CE = CA. Chứng minh các đường thẳng AH, BE, CD cũng đi qua một điểm.

Hướng dẫn

Trên tia đối của tia AH, lấy điểm I sao cho AI = BC

Chứng tỏ rằng AH, BE, CD là ba đường cao của tam giác IBC.

Bài 400. Cho tam giác ABC cân đỉnh A. Từ điểm D trên cạnh AB, vẽ đường thẳng song song với BC cắt AC tại E. Chứng minh rằng $BE > \frac{1}{2}(DE + BC)$.

Hướng dẫn

Vẽ BH ⊥ DE tại H, EN ⊥ BC tại N.

Chứng minh HD = NC.

Bài 401. Cho tam giác ABC ($\widehat{A} = 90^0$), vẽ AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Chứng minh rằng AH + BC > AB + AC.

Hướng dẫn

Trên tia BC lấy điểm D sao cho BD = AB, trên tia AC lấy điểm E sao cho AE = AH. Chứng minh DC > EC.

Bài 402. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu trong tam giác có điểm D sao cho AD = AB thì AB < AC.

Hướng dẫn

Vẽ AH ⊥ BD tại H, gọi E là giao điểm của BD và AC. Chứng minh AD < AE.

Bài 403. Cho tam giác ABC, M là điểm trên tia phân giác ngoài của góc C. Chứng minh rằng MA + MB > AC + BC.

Hướng dẫn

Vẽ AH ⊥ CM tại H, AH cắt BC tại D. Chứng minh MA = MD, AC = CD.

Bài 404. Cho tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao. Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của các đường phân giác của các tam giác ABC, HAB, HAC. Chứng minh rằng AD ⊥ EF.

Hướng dẫn

Gọi M là giao điểm của AE và BC, N là giao điểm của AF và BC.

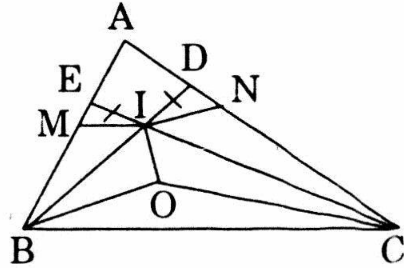
Chứng minh ΔCAM cân tại C, ΔBAN cân tại B

Do đó BD, CF là các đường cao của tam giác AEF.

Bài 405. Cho tam giác ABC. D và E lần lượt trên các cạnh AC, AB sao cho $\widehat{ABD} = \frac{1}{3}\widehat{ABC}$, $\widehat{ACE} = \frac{1}{3}ACB$. BD và CE cắt nhau tại I, biết rằng ID = IE. Chứng minh rằng hoặc tam giác ABC cân tại A hoặc $\widehat{BAC} = 90^0$.

Hướng dẫn

Xét ba trường hợp $\widehat{EIB} = 60^0$, $\widehat{EIB} > 60^0$; $\widehat{EIB} < 60^0$.



MỤC LỤC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại: (04)9724852 (04)9724770 Fax: (04)9714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập: PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập NGUYỄN THỊ NGỌC HÂN

Sửa bài: THÙY DƯƠNG

Trình bày bìa: QUỐC VIỆT

Đối tác liên kết xuất bản:
CÔNG TY SÁCH - THIẾT BỊ GIÁO DỤC ĐỨC TRÍ

SÁCH LIÊN KẾT

TUYỂN CHỌN 405 BÀI TẬP TOÁN 7

Mã số: 1L - 221 ĐH2009
In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24cm tại Trung tâm Mỹ thuật ứng dụng
Số xuất bản: 747-2009/CXB/03-133/ĐHQGHN, ngày 17/08/2009
Quyết định xuất bản số: 221 LK-TN/XB
In xong và nộp lưu chiểu Quý IV năm 2009.